1. Grundlagen des Zufallexperiments

1.1. Definition: Ein Vorgang ist genau dann ein Zufallexperiment, wenn

i) von allen möglichen Ergebnissen genau eines eintritt,

ii) alle möglichen Ergebnisse bekannt sind,

iii) vor Ablauf des Vorganges es nicht möglich ist, vorherzusagen, welches Ergebnis der Vorgang haben wird.

1.2. Definition: Eine nicht leere Menge von Ergebnissen eines Zufallexperiments ist genau dann die **Ergebnismenge**, wenn

i) die Ergebnisse sich gegenseitig ausschließen (paarweise disjunkt sind),

ii) die Ergebnismenge vollständig ist (es gibt kein mögliches Ergebnis, dass nicht in der Ergebnismenge ist).

1.3. Folgerung: Die Ergebnismenge ist eindeutig bestimmt.

1.4. Bezeichnung: Die Ergebnismenge wird ab sofort mit Ω und ihre Elemente mit ω bezeichnet werden.

1.5. Bezeichnung: Eine Teilmenge A der Ergebnismenge ist ein **Ereignis**. Wenn ein Ergebnis $\omega \in A$ auftritt, so sagt man „*Das Ereignis A ist eingetreten*“.

1.6. Folgerung: Die leere Menge $\emptyset$ und die Ergebnismenge Ω sind Ereignisse.

1.7. Folgerung: Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ ist die Menge aller Ereignisse.

1.8. Schreibweise: Das Ereignis „A und B“ wird als „$A \cap B$“, das Ereignis „A oder B“ als „$A \cup B$“ und das Ereignis „nicht A“ als $\bar{A}$ bezeichnet.

1.9. Bezeichnung: Gilt für $A, B \in \mathfrak{P}(\Omega)$, dass $A \cap B = \emptyset$, so heißen A und B unvereinbar.

1.10. Definition: Ein Zufallexperiment ist genau dann ein **Laplace-Experiment**, wenn die einzelnen Ergebnisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Dieses kann nur durch eine **Laplace-Annahme** angenommen werden.

2. Relative Häufigkeit

<u>2.1. Definition:</u> Sei A ein Ereignis bei einem Zufallexperiment. Tritt nach n Versuchen das Ereignis A k-mal auf, so nennt man den Quotienten $\mathrm{h}_n(\mathrm{A}) := \frac{k}{n}$ **die relative Häufigkeit des Ereignisses A** bei den n Versuchen. Dabei ist zu betonen, dass $\mathrm{h}_n(\mathrm{A})$ von der Versuchsfolge abhängt, was die Bezeichnung nicht aussagt.

<u>2.2. Folgerungen:</u> Folgende Folgerungen lassen sich ableiten:

i) $0 \leq \mathrm{h}_n(\mathrm{A}) \leq 1$,

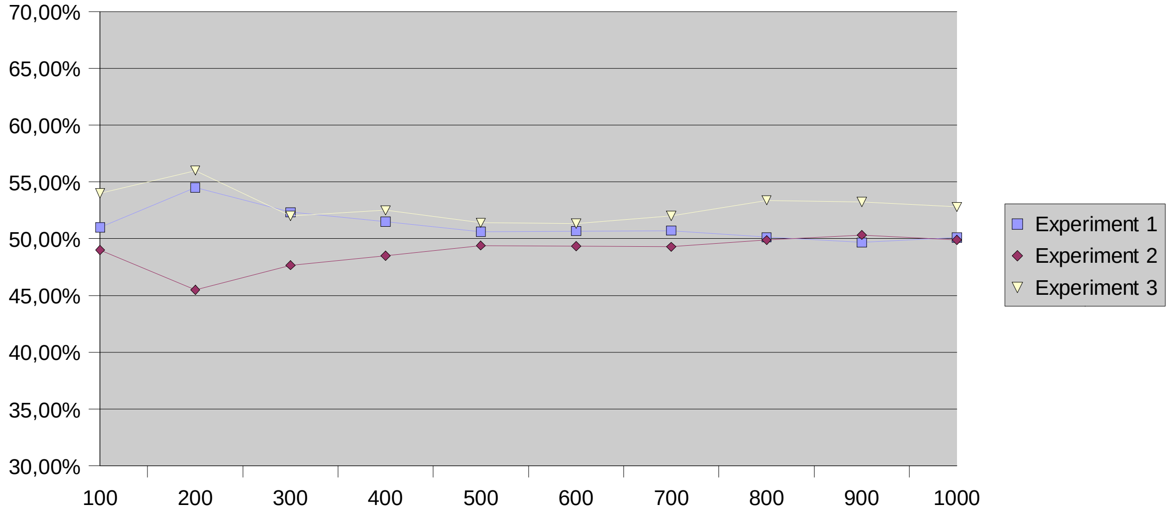
ii) $\mathrm{h}_n(\Omega) = 1$,

iii) $\mathrm{h}_n(\emptyset) = 0$,

iv) $\mathrm{h}_n(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{h}_n(\mathrm{A}) + \mathrm{h}_n(\mathrm{B})$, wenn $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \emptyset$,

v) $\mathrm{h}_n(\bar{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{h}_n(\mathrm{A})$.

<u>2.3. Beispiel:</u> Der Computer generiert per Zufallsgenerator drei mal 1000 Zahlen. Das Zufallexperiment ist, ob die generierte Zahl gerade ist. Angezeigt wird $\mathrm{h}_n(\mathrm{A}) := \frac{k}{n}$.



<u>2.4. Empirisches Gesetz der großen Zahlen:</u> Für die relativen Häufigkeiten $\mathrm{h}_n(\mathrm{A})$ eines Ereignisses A beobachtet man:

i) Mit wachsender Zahl n von Versuchen schwankt die relative Häufigkeit immer weniger um eine Zahl p.

ii) Mit großer Sicherheit ist der Quotient $\mathrm{h}_n(\mathrm{A})$ für großes n ein guter Näherungswert für p.

Warnung: Die Bildung von $\lim_{n \to \infty} \mathrm{h}_n(\mathrm{A}) = p$ um eine Wahrscheinlichkeit zu definieren, ist unzulässig, da die Funktion nicht notwendigerweise konvergiert.

<u>2.5. Interpretationsregel:</u> Die Zahl p besagt, dass in einer langen Serie von n Versuchen das Ergebnis A ungefähr $n \cdot p$-mal eintreten wird.

3. Wahrscheinlichkeit

3.1. **Axiomensystem von Kolmogorow**: Sei Ω eine endliche Ergebnismenge. Eine Funktion $P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann ein **Wahrscheinlichkeitsmaß**, wenn gilt:

i) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega): P(A) \geq 0$

ii) $P(\Omega) = 1$

iii) $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega): A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Die Zahl P(A) heißt **Wahrscheinlichkeit** der Ereignisses A.

3.2. Bemerkung: Das Axiom iii) kann auch wie folgt notiert werden:

iii*) $\forall A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j: P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$

3.3. Satz: Eine Funktion $P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann ein Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn gilt:

i) $\forall i = 1, \ldots, N: P(\omega_i) \geq 0$

ii) $P(\omega_1) + \ldots + P(\omega_N) = 1$

iii) $\forall A \subset \Omega, A \neq \emptyset: P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$

iv) $P(\emptyset) = 0$

3.4. Bezeichnung: Ist Ω eine Ergebnismenge und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{P}(\Omega)$, so nennt man das Paar (Ω, P) einen **Wahrscheinlichkeitsraum**.

3.5. Folgerungen: Es gelten folgende Rechenregeln:

i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ii) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

iii) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

3.6. Das schwache Gesetz der großen Zahlen: In einer langen Serie von n Versuchen strebt die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit $h_n(A)$ um weniger als eine beliebige positive Zahl ε von P(A) abweicht, gegen 1.