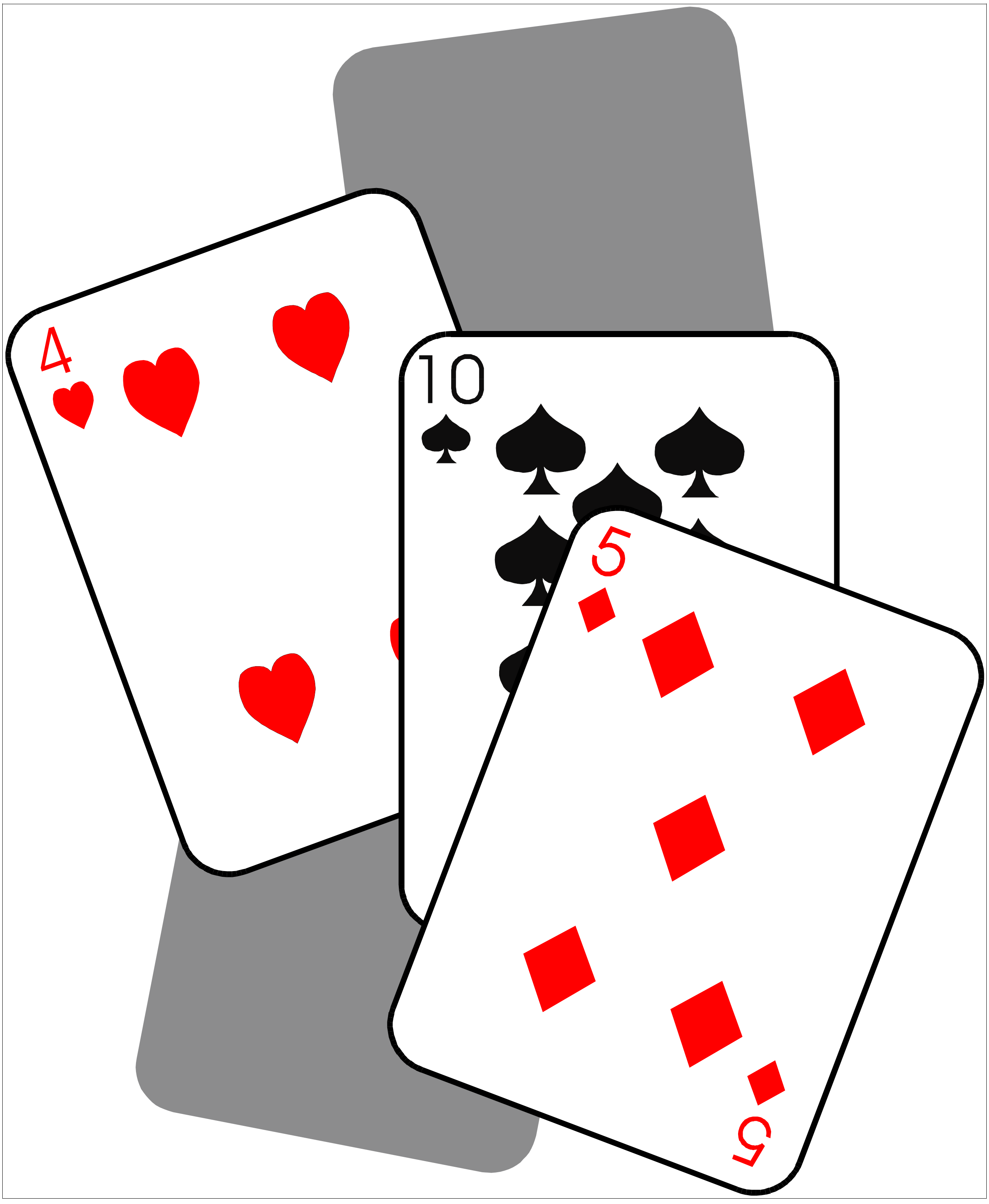
Wahrscheinlichkeit



Ausarbeitung im Rahmen des Proseminars Didaktik der Mathematik „Didaktik der Elementaren Stochastik“ im SS 2001 an der Universität Osnabrück unter Dr. Johann Sjuts durch Christian Datzko.

Inhaltsverzeichnis

1. Sachteil

In diesem Sachteil sollen die mathematischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeit gelegt werden. Im Wesentlichen orientiere ich mich hierbei an [Stochastik MS 2].

1.1. Grundlagen des Zufallexperiments

Obwohl nicht Kern dieser Ausarbeitung, ist ein Zufallexperiment doch Grundlage der Wahrscheinlichkeit. Daher hier einige Grundlagen zur Referenz:

(1) <u>Definition:</u> Ein Vorgang ist genau dann ein Zufallexperiment, wenn:

i) von allen möglichen Ergebnissen genau eines eintritt

ii) alle möglichen Ergebnisse bekannt sind,

iii) vor Ablauf des Vorganges es nicht möglich ist, vorherzusagen, welches Ergebnis der Vorgang haben wird.

(2) <u>Definition:</u> Eine nicht leere Menge von Ergebnissen eines Zufallexperiments ist genau dann die Ergebnismenge, wenn

i) die Ergebnisse sich gegenseitig ausschließen (paarweise disjunkt sind)

ii) die Ergebnismenge vollständig ist (es gibt kein mögliches Ergebnis, dass nicht in der Ergebnismenge ist)

(3) Folgerung: Die Ergebnismenge ist eindeutig bestimmt.

(4) Bezeichnung: Die Ergebnismenge wird ab sofort mit Ω und ihre Elemente mit ω bezeichnet werden.

(5) Bezeichnung: Eine Teilmenge A der Ergebnismenge ist ein *Ereignis*. Wenn ein Ergebnis $\omega \in A$ auftritt, so sagt man: „Das Ereignis A ist eingetreten".

(6) Folgerung: Die leere Menge $\emptyset$ und die Ergebnismenge Ω sind Ereignisse.

(7) Folgerung: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ ist die Menge aller Ereignisse.

(8) Schreibweise: Das Ereignis „A und B" wird als „$A \cap B$", das Ereignis „A oder B" als „$A \cup B$" und das Ereignis „nicht A" als $\bar{A}$ bezeichnet.

(9) Bezeichnung: Gilt für $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, dass $A \cap B = \emptyset$, so heißen A und B unvereinbar.

(10) Definition: Ein Zufallexperiment ist genau dann ein *Laplace-Experiment*, wenn die einzelnen Ergebnisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Dieses kann nur durch eine *Laplace-Annahme* angenommen werden.

1.2. Relative Häufigkeit

(1) Definition: Sei A ein Ereignis bei einem Zufallexperiment. Tritt nach n Versuchen das Ergebnis k-mal auf, so nennt man den Quotienten $\mathrm{h}_n(A) := \frac{k}{n}$ *die relative Häufigkeit des Ereignisses A* bei den n Versuchen. Dabei ist zu betonen, dass $\mathrm{h}_n(A)$ von der Versuchsfolge abhängt, was die Bezeichnung nicht aussagt.

(2) Folgerungen: Folgende Folgerungen lassen sich ableiten:

i) $0 \le \mathrm{h}_n(A) \le 1$,

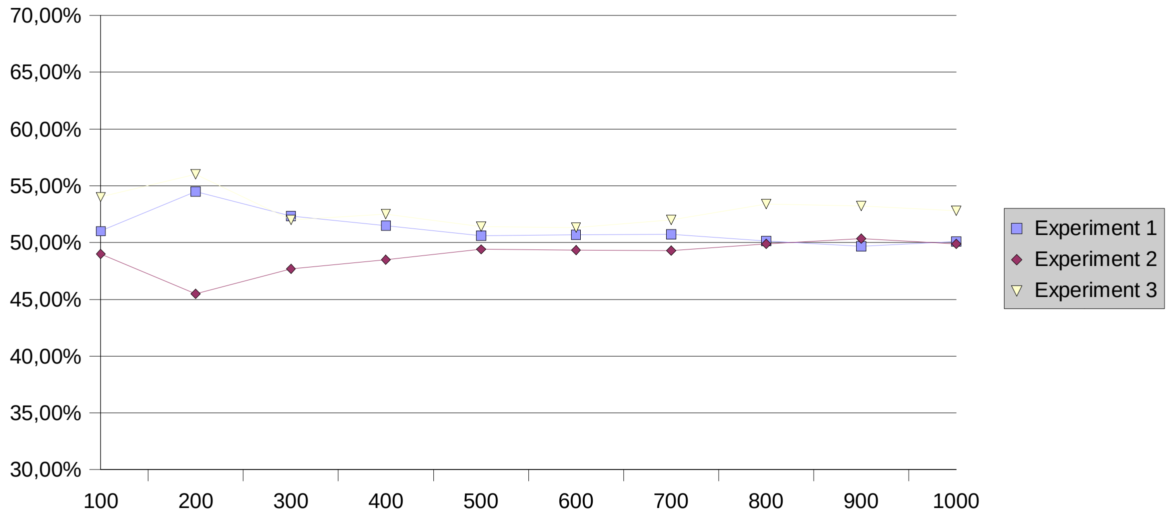
ii) $\mathrm{h}_n(\Omega) = 1$,

iii) $\mathrm{h}_n(\emptyset) = 0$,

iv) $\mathrm{h}_n(A \cup B) = \mathrm{h}_n(A) + \mathrm{h}_n(B)$, wenn $A \cup B = \emptyset$,

v) $\mathrm{h}_n(\bar{A}) = 1 - \mathrm{h}_n(A)$.

(3) Beispiel: Der Computer generiert per Zufallsgenerator drei mal 1000 Zahlen. Das Zufallexperiment ist, ob die generierte Zahl gerade ist. Angezeigt wird $\mathrm{h}_n(A) := \frac{k}{n}$.



(4) Empirisches Gesetz der großen Zahlen: Für die relative Häufigkeiten $\mathrm{h}_n(A)$ eines Ereignisses *A* beobachtet man:

i) Mit wachsender Zahl *n* von Versuchen schwankt die relative Häufigkeit immer weniger um eine Zahl *p*.

ii) Mit großer Sicherheit ist der Quotient $\mathrm{h}_n(A)$ für großes *n* ein guter Näherungswert für *p*.

Warnung: Die Bildung Grenzwertbildung von $\mathrm{h}_n(A)$ um eine Wahrscheinlichkeit *p* zu definieren ist unzulässig, da die Funktion $\mathrm{h}_n(A)$ nicht notwendigerweise konvergiert! Folgendes darf deshalb nicht geschrieben werden: $\lim_{n \to \infty} \mathrm{h}_n(A)$.

(5) Interpretationsregel: Die Zahl *p* besagt, dass in einer langen Serie von *n* Versuchen das Ereignis *A* ungefähr $n \cdot p$-mal eintreten wird.

1.3. Wahrscheinlichkeit

(1) Axiomensystem von Kolmogorow: Sei Ω eine endliche Ergebnismenge eines Zufallexperiments. Eine Funktion $\mathrm{P}:\mathcal{P}(\Omega)\to\mathbb{R}$ ist genau dann ein *Wahrscheinlichkeitsmaß*, wenn gilt:

i) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega): \mathrm{P}(A) \geq 0$

ii) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$

iii) $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega): A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$

Die Zahl P(*A*) heißt *Wahrscheinlichkeit* des Ereignisses A.

(2) Bemerkung: Das Axiom iii) kann auch wie folgt notiert werden:

iii*) $\forall A_j \cap A_j = \emptyset \textit{ für } i \neq j: \mathrm{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_j)$

(3) Satz: Eine Funktion $\mathrm{P}:\mathcal{P}(\Omega)\to\mathbb{R}$ ist genau dann ein Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn gilt:

i) $\forall i = 1, \ldots, N: \mathrm{P}(\omega_i) \geq 0$

ii) $\mathrm{P}(\omega_1)+...+\mathrm{P}(\omega_N)=1$

iii) $\forall A\subset\Omega, A\neq\emptyset : \mathrm{P}(A)=\sum_{\omega\in A}\mathrm{P}(\omega)$

iv) $P(\emptyset)=0$

(4) Bezeichnung: Ist Ω eine Ergebnismenge und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{P}(\Omega)$, so nennt man das Paar (Ω, P) einen *Wahrscheinlichkeitsraum.*

(5) Folgerungen: Es gelten folgende Rechenregeln:

i) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

ii) $\mathrm{P}(\bar{A})=1-\mathrm{P}(A)$

iii) $A\subset B\Rightarrow \mathrm{P}(A)\leq \mathrm{P}(B)$

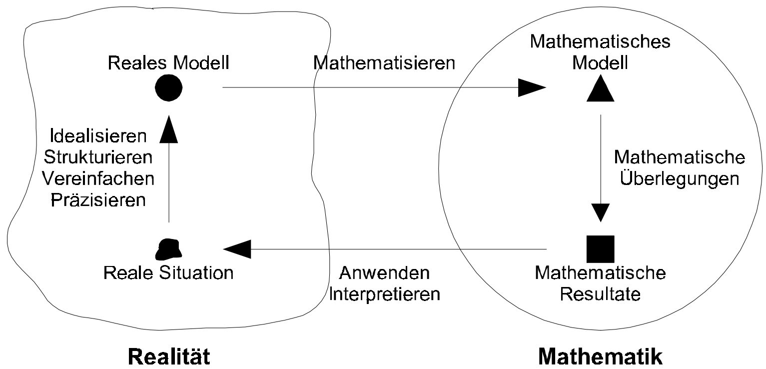
(6) Das schwache Gesetz der großen Zahlen: In einer langen Serie von n Versuchen strebt die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit $\mathrm{h}_n(A)$ um weniger als eine beliebige positive Zahl ϵ von P(A) abweicht, gegen 1.

2. Didaktik

2.1. Allgemeine Vorüberlegungen

Jeder Unterricht und somit auch der Mathematikunterricht soll eine Verbindung zwischen dem Schüler und einer Sache, im Mathematikunterricht der Mathematik, herstellen. Dabei hat der Lehrer die Aufgabe, sowohl die Schüler als auch die Sache zu befragen. Auch wenn der Lehrer dabei eine Auswahl in der Sache trifft, so muss doch der Schüler mit der Sache selber in Kontakt kommen können und nicht nur mit einem didaktischen Extrakt. Es ist also in den folgenden didaktischen Überlegungen darauf zu achten, dass nicht Dinge, die die Sache fordert, unterschlagen werden, so wie genauso wenig außer Acht gelassen werden darf, dass der Schüler die Sache fassen kann.

Es gibt eine Idee, die der Mathematik zugrunde liegt, die sich im Grunde durch die ganze Mathematik durchzieht. Sie ist gleichsam Legitimation der Mathematik, indem sie die Nützlichkeit von Mathematik aufzeigt, auf der anderen Seite aber auch eine Zurechtweisung in ihre Schranken, indem sie ihre Grenzen markiert. Diese Idee ist in folgendem Schema ([Sjuts Mathematik als Werkzeug]) gut zusammengefasst:



Die Wahrscheinlichkeitsrechnung als eine der jüngeren Fachgebiete der Mathematik, die in der Schule behandelt werden (im Gegensatz z. B. zur Geometrie, Algebra, ...), ist ein Teilgebiet, bei der diese Sichtweise sehr hilfreich ist, da sie sich selber so präsentiert: Man beobachtet eine reale Situation (wie z.B. das Ziehen einer Karte aus einem Skat-Kartenspiel), idealisiert dies (indem man z.B. außer Acht läßt, dass aus Versehen mehrere Karten auf einmal gezogen werden), fasst dies in ein mathematisches Modell (durch Laplace-Annahme und die Kolmogorow-Axiome die Festsetzung der Wahrscheinlichkeit auf 0.03125, dass eine bestimmte Karte gezogen wird) und interpretiert diese auf die Realität an. Wenn der Schüler dies kennt und anwenden kann, wird er auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung besser verstehen können.

Also ist das Besprechen und Immer-wieder-darauf-zurückkommen auf diese Idee von der Sache her und vom Schüler her nützlich und gut.

2.2. Wahrscheinlichkeit

Bevor es an die Wahrscheinlichkeit geht, ist die Klärung der Begriffe des Bereiches Zufallexperiment notwendig, da die Wahrscheinlichkeit darauf in hohem Maße aufbaut. Dazu verweise ich auf den Vortrag von Christoph Ungruhe.

Wichtig ist es, mit dem Schüler den Begriff der Wahrscheinlichkeit zu klären. Durch einen Unterricht mit einem hohen Gesprächsanteil, der durch Unterrichts-Diskussionen bzw. Gruppendiskussionen, die ihre Ergebnisse vortragen, gewährleistet werden kann, können Schülervorstellungen über den Begriff „Wahrscheinlichkeit“ mit dem Verständnis der Mathematik von Wahrscheinlichkeit in Einklang gebracht werden. Die Eckpunkte die den Begriff „Wahrscheinlichkeit“ in der Mathematik definieren, sind durch die Axiome von Kolmogorow formuliert. Dabei ist folgendes wichtig:

- Eine Wahrscheinlichkeit gehört zu einem Zufallexperiment
- Eine Wahrscheinlichkeit ist ein numerischer Wert
- Eine Wahrscheinlichkeit möchte eine Aussage über die Realität treffen
- Eine Wahrscheinlichkeit (bis auf die Ausnahme des sicheren Ergebnisses) gibt keine Garantie für das Eintreffen eines Ereignisses
- Wahrscheinlichkeiten sind so gewählt, dass man mit ihnen sinnvoll rechnen kann.

Diese Punkte sind in den drei Kolmogorow-Axiomen wie folgt formuliert: In den Voraussetzungen wird geklärt, dass eine Wahrscheinlichkeit eine Zahl für Ereignisse eines Zufallexperiments ist, Axiom i) und ii) enthalten die Normierung der Wahrscheinlichkeiten und das Axiom die Additivität von Wahrscheinlichkeiten. Die Idee, die dahinter steckt ist in dem oben genannten Schema verdeutlicht und stellt somit den Realitätsbezug her. Begriffe wie „wahrscheinlich“, „unwahrscheinlich“, „unmöglich“ und „sicher“ in Bezug auf Ereignisse eines Zufallexperiments lassen sich nach der Klärung des Begriffes der Wahrscheinlichkeit einfach erklären: Ein Ereignis ist sicher, wenn die Wahrscheinlichkeit maximal (also gleich 1) ist, unmöglich, wenn sie minimal (also gleich 0) ist, wahrscheinlich, wenn es wahrscheinlicher ist, dass es eintritt als dass es nicht eintritt (größer als 0,5) und entsprechend unwahrscheinlich, wenn es wahrscheinlicher ist, dass es nicht eintritt als dass es eintritt (kleiner als 0,5).

2.3. 1/2, 50%, 1:1 oder 0,5?

Bevor man sich daran machen kann, das Wissen über die Wahrscheinlichkeit in einem Axiomensystem zu formulieren, sollte man darüber gesprochen haben, in was für einer Zahldarstellung Wahrscheinlichkeiten notiert werden. Dabei sollte man zu dem Ergebnis kommen, dass es auf die Zahldarstellung nicht ankommt sondern auf deren sinnvolle Verwendung. Manchmal sind Brüche sinnvoll, manchmal Prozente, manchmal Dezimalzahlen und manchmal auf die Darstellung als „1:1“. Dabei muss aber klar gemacht werden, was man unter „1:1“ versteht, vielleicht anhand dieser Abbildung:

$$\mathrm{f}\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to(\mathbb{R},\mathbb{R})$$
$$a{:}b=\mathrm{f}\,(a,b)=\left(\frac{a}{a+b},\frac{b}{a+b}\right)$$

Dabei sind die beiden Einträge des Vektors die Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse in Bruchzahldarstellung.

2.4. Axiomensystem

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung fordert, dass im Behandeln der Wahrscheinlichkeit das Wissen über die Wahrscheinlichkeit in einem Axiomensystem formuliert wird. Ohne dieses kann man in der Mathematik nicht weiter voranschreiten im Bereich der Wahrscheinlichkeit, da auf ihm die ganzen weiteren Ergebnisse und Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung beruhen. Auch für den Schüler ist es wichtig. Zum einen ist es ein wesentliches Puzzleteil in Bezug auf das oben genannte Schema, zum zweiten gibt es Anlass, das vorhandene und erarbeitete Wissen zu präzisieren und das Wesentliche zu abstrahieren und zum dritten fördert es sein Verständnis der Wahrscheinlichkeitsrechnung immens: Wenn dies nicht gründlich behandelt wird, kann es dazu führen (und führt es in der Praxis leider auch allzu oft), dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung für ihn etwas mystisches, unbegreifliches hat. Besonders für gute Schüler könnte das eine Gefahr sein, die ohne Anleitung des Lehrers ahnen, dass da etwas zu präzisieren und formulieren sei, was sie jedoch alleine nicht können. Dies könnte ein Grund dafür sein, dass Lehrer der Meinung sind, dass Wahrscheinlichkeitsrechnung eben nichts für die Schule sei, weil die Ergebnisse unberechenbar seien. Ohne eine Ausformulierung und ein Verinnerlichen dieses Axiomensystems bleibt es auch eher Glückssache, dass man die rechte Idee für die Lösung einer Aufgabe bekommt, während man mit diesem Axiomensystem systematisch und ohne eine Idee an eine Aufgabe rangehen kann und so viel sicherer zu einer Lösung in Stresssituationen (wie einer Klassenarbeit, etc.) kommen kann.

Dabei ist es auch wichtig, dass dieses Axiomensystem nicht einfach vom Himmel fällt sondern von den Schülern gemeinsam durch Präzisierung und Abstraktion selbst erarbeitet wird. So überdenken und ergänzen sie zum einen noch mal ihr eigenes Wissen, sind im Sinne eines handlungsorientierten und konstruktivistischen Unterrichts aktiv an der Erarbeitung beschäftigt und lernen zu guter letzt ein wichtiges Stück Mathematik kennen bzw. üben sich in ihm.

Es könnte noch hilfreich sein, diese Präzisierung und Abstraktion anhand eines typischen Beispiels zu erarbeiten, wie etwa dem Ziehen einer Karte aus einem Skat-Kartenspiel. Der Schüler sollte dieses Beispiel kennen, auch einige Aufgaben mit ihm sich überlegt haben, so dass er anhand dieses Beispiels sich die Forderungen verdeutlichen kann. Hierbei ist es aber auch wichtig, darauf zu achten, dass die Gedanken des Schülers nicht in einem Laplace-Experiment verhaftet bleiben, sondern dass er sich mit vor Augen hält, dass es auch andere Zufallexperimente gibt, die nicht mit einer Laplace-Annahme gelöst werden können (wie z.B. das Experiment, welcher der Jungen der Klasse einen 100m-Lauf gewinnt).

2.5. Exkurs: Wahl des rechten Axiomensystems

Im Rahmen meines Literaturstudiums bin ich auf verschiedenen Formulierungen des Axiomensystems gestoßen. Diese sind:

1. [Wahrscheinlichkeit-Schüler]

§W $\bigwedge_{E} 0 \leq \mathrm{P}(E) \leq 1$

§Ä $\bigwedge_{E_1}\bigwedge_{E_2}\left(\bigwedge_{x}(E_1 x \leftrightarrow E_2 x) \rightarrow \mathrm{P}(E_1)=\mathrm{P}(E_2)\right)$

§S $\bigwedge_{S}\left(\bigwedge_{x} S\,x \rightarrow \mathrm{P}(S)=1\right)$

§OE $\bigwedge_{E_1}\bigwedge_{E_2}\left(\neg\bigvee_{x}(E_1 x \wedge E_2 x) \rightarrow \mathrm{P}(E_1 \vee E_2)=\mathrm{P}(E_1)+\mathrm{P}(E_2)\right)$

Dabei sind die Buchstaben so gewählt, dass man etwas mit ihnen assoziieren kann:

W≙Funktionswert, Ä≙Äquivalente Eigenschaften, S≙sicheres Ergebnis, OE≙oder-Eigenschaft.

2. [Athen WuSt]

A I Die Ereignisse gehören einem Ereignisraum an.

A II $\mathrm{P}(E) \geq 0$

A III $\mathrm{P}(S)=1$

A IV $\mathrm{P}(E_1 \cup E_2)=\mathrm{P}(E_1)+\mathrm{P}(E_2), E_1 \cap E_2=\emptyset$

3. [Stochastik MS 2]

i) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega): \mathrm{P}(A) \geq 0$

ii) $\mathrm{P}(\Omega)=1$

iii) $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega): A \cap B=\emptyset \Rightarrow \mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

oder

i) $\forall i=1,\dots,N: \mathrm{P}(\omega_i)\geq 0$

ii) $\mathrm{P}(\omega_1)+\dots+\mathrm{P}(\omega_N)=1$

iii) $\forall A\subset\Omega, A\neq\emptyset: \mathrm{P}(A)=\sum_{\omega\in A}\mathrm{P}(\omega)$

iv) $P(\emptyset)=0$

Diese Axiomensysteme stehen vor unterschiedlichen Hintergründen. Welches man wählt, sollte man davon abhängig machen, was die Schüler können und verstehen. Zur Hilfe hier einige Hinweise, was für Grundlagen für die einzelnen Axiomensysteme nötig sind:

1. [Wahrscheinlichkeit-Schüler]

Dieses Axiomensystem baut auf der Prädikatenlogik auf. Das Eintreten eines Ereignisses wird als Prädikat notiert. Deshalb ist auch das Axiom §Ä notwendig: Während es bei Zahlen ein logisches Grundaxiom ist, dass $\forall x, y: x=y\Rightarrow \mathrm{f}(x)=\mathrm{f}(y)$, muss dies bei Eigenschaften nicht notwendigerweise gelten. Daher muss dieses axiomatisch gefordert werden. Auf der anderen Seite kann diese Notation dem Schüler einleuchtender sei, da sie die Quantoren explizit hinschreibt.

2. [Athen WuSt]

Diese Notation ist wohl die in der Schule gebräuchlichste von den dreien. Sie ist mengentheoretisch notiert ohne jedoch kompliziertere Konstrukte wie die Potenzmenge zu verwenden. Dass Axiom A I ist an dieser Stelle jedoch unüblich, normalerweise erscheint es in den Voraussetzungen.

3. [Stochastik MS 2]

Diese beiden Axiome sind auch mengentheoretisch notiert, jedoch auf einer abstrakteren Basis. Anstelle eines S für das sichere Ergebnis ist hier die Ergebnismenge Ω notiert. Auch wird das Konstrukt der Potenzmenge, der Menge aller Teilmengen verwendet. Dies könnte für Schüler problematisch werden, wenn er mit dem Umgang der Mengentheorie nicht sehr vertraut ist. Kennt er sich jedoch darinnen aus, ist es eine gute Sache, weil allgemeiner gehalten.

2.6. Folgerungen und Sätze aus dem Axiomensystem

Während man das Axiomensystem erarbeitet wird deutlich, dass es Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten gibt, die aus dem Axiomensystem folgen, die man nicht mit aufnehmen musste, weil sie beweisbare Sätze sind. Zur Übung im Umgang mit dem Axiomensystem, zum besseren Verständnis und zur Übung mathematischer Vorgehensweisen wäre es nun an der Zeit, die Folgerungen (5) aus dem Axiomensystem zu formulieren und lückenlos zu beweisen. Der Satz (3) ist meines Erachtens nach ist jedoch nicht so notwendig, die einzelnen Punkte als Folgerungen aus dem Axiomensystem jedoch schon. Ich könnte mir aber z.B. sehr gut vorstellen, dass man $\mathrm{P}(\emptyset)=0$ mit dem Axiomensystem als Hausaufgabe beweisen lässt und dann in der darauf folgenden Stunde Gruppendiskussionen startet, die diese Hausaufgabe diskutiert, als Impuls in die Gruppendiskussion sollte man dann vielleicht fiktive Schüleräußerungen bzw. -lösungen geben, die die Diskussion starten könnten.

Um den Bereich Wahrscheinlichkeit zum Abschluss zu bringen und etwa zur relativen Häufigkeit oder zur bedingten Wahrscheinlichkeit und der Kombinatorik überzugehen, sollte man die erarbeiteten Dinge anhand verschiedenster Aufgaben üben. Dann führen die Schüler das oben genannte Schema durch, vollziehen dadurch die dahinter steckende Idee nach und bauen ein operatives Wissen auf, das sie später in einer Klassenarbeit oder auch im Leben anwenden können.

2.7. Zufallexperiment, Wahrscheinlichkeit, relative Häufigkeit?

[Stochastik MS 2] geht (so wie ich es auch in dem Sachteil anfangs getan habe) nach der Reihenfolge Zufallexperiment, Wahrscheinlichkeit, relative Häufigkeit vor. [Wahrscheinlichkeit-Schüler] jedoch geht in der Reihenfolge Zufallexperiment, relative Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit vor. Dies sollte Anlaß geben, darüber nachzudenken, welche Reihenfolge sinnvoll ist für die Schüler.

Fest steht, dass vor der Wahrscheinlichkeit und vor der relativen Häufigkeit das Zufallexperiment steht. Beide bauen auf dem Zufallexperiment auf, Zufallexperimente sind elementare Bausteine von beidem. Die Sache fordert also, dass man zuerst die Zufallexperimente behandelt. Auch für den Schüler ist es gut, braucht er hier doch kein großes mathematisches Vorwissen sondern kann da abgeholt werden, wo er in der Regel steht: Er kennt zahlreiche Zufallexperimente aus seinem Alltag und kann von sich selber aus präzisieren, was man sich darunter vorzustellen vermag.

In der Frage jedoch, ob danach die relative Häufigkeit oder die Wahrscheinlichkeit kommt, ist es nicht so offensichtlich. Hier müssen wir genauer in der Sache schauen und auch den Schüler uns genauer anschauen, was für ihn praktikabel und gut ist.

Als erstes fällt auf, dass die Wahrscheinlichkeit nicht als Grenzwert der relativen Häufigkeit beschrieben werden kann. Dort steht:

> Warnung: Die Bildung Grenzwertbildung von $\mathrm{h}_n(A)$ um eine Wahrscheinlichkeit *p* zu definieren ist unzulässig, da die Funktion $\mathrm{h}_n(A)$ nicht notwendigerweise konvergiert! Folgendes darf deshalb nicht geschrieben werden: $\lim_{n \to \infty} \mathrm{h}_n(A)$.

Als nächstes fällt auf, dass das schwache Gesetz der großen Zahlen 3.(6) erst im dritten Abschnitt nach der Behandlung der Wahrscheinlichkeit formuliert wird. Dies ist (anders übrigens als in [Stochastik MS 2]), da dort von Wahrscheinlichkeit geredet wird, die ja erst nach dem Behandeln von Wahrscheinlichkeit gefasst werden kann!

Als weiteres ist ein Problem, dass man – und wenn man noch so vorsichtig ist – das Erwähnen des Wortes „Wahrscheinlichkeit“ im Bezug auf relative Häufigkeit nur sehr schwer vermeiden kann und aus Schülermunde sehrwahrscheinlich kommen wird. Es besteht die Gefahr, dass man mit relativer Häufigkeit dem Schüler ein falsches Bild von Wahrscheinlichkeit entstehen lässt.

Auf der anderen Seite ist es eher intuitiver, sich zuerst einmal die Realität anzuschauen, diese zu beobachten, Versuchsserien zu machen, damit man sich ein Bild von dem Phänomen Zufallexperiment machen kann, um dieses dann in den Begriff der Wahrscheinlichkeit zu präzisieren.

Zu guter letzt wird es geschichtlich gesehen wohl auch eher so gewesen sein, dass man die Zufallexperimente beobachtet hat, dies auf längere Zeit hin untersucht hat und sich Gedanken gemacht hat und dann darauf gekommen ist, dass man eben keinen Grenzwert relativer Häufigkeiten bilden kann und somit zu einem Axiomensystem gekommen ist, wie wir es heute kennen.

Ich bin jedoch der Meinung, das die in [Wahrscheinlichkeit-Schüler] vorgeschlagene Reihenfolge sinnvoller ist. Sie entspricht der Sache und ist für die Schüler in einer tieferen Verstehensweise einfacher zu durchdringen. Auch wenn es an der Oberfläche besser erscheinen könnte, zuerst relative Häufigkeit zu behandeln, dabei das Problem links liegen zu lassen, dass eine Grenzwertbildung unmöglich ist, und dann zur Wahrscheinlichkeit zu gehen, so ist doch eine tiefere und vollständigere Verstehensweise der Sache an sich (und eben nicht eines didaktischen Extrakts), die Ziel des Unterrichts sein sollte, viel schwieriger.

3. Forschung

3.1. Zielgruppe

Das Ziel der Forschung war es, festzustellen, wie gut Studenten, die am Anfang ihres Studiums stehen und entweder Mathematik studieren oder dieses im Rahmen ihres Studiums belegen müssen, Aufgaben, die die Wahrscheinlichkeit betreffen, lösen können. Um dieses Ziel zu erfüllen habe ich den Studenten der Veranstaltung „Analysis I“, die auch in diesem Semester an der Universität Osnabrück unter Prof. Meyer-Nieberg angeboten wird, einen anonymen Test gestellt. Die Teilnahme war freiwillig, weswegen auch nur 71 der ca. 130 Teilnehmer dieser Veranstaltung daran teilnahmen. Die „Analysis I“-Veranstaltung hat nichts mit Wahrscheinlichkeit zu tun, von daher möge bitte keiner auf die Idee kommen, die Ergebnisse - seien sie jetzt positiv oder negativ - auf die Veranstaltung von Prof. Meyer-Nieberg zurückzuführen. Ich möchte Prof. Meyer-Nieberg und seinem Assistenten Christian Möller jedoch ganz herzlich danken, dass sie sich bereit erklärt haben, mich bei diesem Test zu unterstützen, und mir dazu sogar 15 Minuten der Vorlesungszeit geschenkt haben.

3.2. Test

Die Aufgaben des Tests sind nicht willkürlich sondern bewußt gewählt, um zusätzlich Vergleichsmöglichkeiten zu haben. Die erste Aufgabe habe ich von Christoph Ungruhe, der in seiner Forschung, die er in der Sitzung vor mir vorgestellt hatte, Schüler verschiedener Gymnasien getestet hatte. Die letzten drei Aufgaben sind den Beispielaufgaben der Population 3 der TIMSS-Studie ([TIMSS/III] – Abschlußklassen der Sekundarstufe II an allgemeinbildenden und beruflichen Schulen) entnommen, die für einigen Wirbel gesorgt hat. Im Einzelnen sind das: Aufgabe 2) L10, Aufgabe 3) L14 und Aufgabe 4) K11 in der jeweils offiziellen deutschen Übersetzung. Zu den Aufgaben kamen noch einige statistische Informationen, die ich zur späteren Auswertung verwendet habe. Die Studenten hatten 20 Minuten Zeit, um den Test zu lösen.

Hier im Kleinformat noch einmal der Test, wie ihn die Studenten bekommen haben:

Anonymer Test zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Persönliche Daten

Dieser Fragebogen soll anonym gelöst werden. Deshalb geben Sie bitte einige Angaben über sich selbst an, dass wir Ihre Angaben einordnen können:

Alter: _______ Studienrichtung: ________________________

Geschlecht: _______ Fachsemester: ________________________

Haben Sie in der Schule Mathematik als Leistungskurs belegt? ☐ Ja ☐ Nein

Ist Ihnen Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Schule gelehrt worden? ☐ Ja ☐ Nein

Haben Sie in ihrem Studium schon Wahrscheinlichkeitsrechnung studiert? ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 1:

a) In einer (undurchsichtigen) Urne befinden sich 50 Kugeln: 49 schwarze und eine weiße. Ein Spiel geht folgendermaßen: Zwei Personen ziehen abwechselnd nacheinander ohne Zurücklegen eine Kugel. Wer zuerst die weiße Kugel zieht, hat gewonnen.

Würden Sie lieber als Erster oder als Zweiter ziehen wollen?

☐ als Erster ☐ als Zweiter ☐ egal

b) Bitte begründen Sie kurz Ihre Antwort!

Aufgabe 2:

a) Ein Warnsystem besteht aus zwei unabhängigen Alarmanlagen, die bei einem Notfall mit den Wahrscheinlichkeiten 0,95 bzw. 0,90 ansprechen. Suchen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Notfall mindestens eine der Alarmanlagen anspricht.

☐ A. 0,995 ☐ B. 0,975 ☐ C. 0,95 ☐ D. 0,90 ☐ E. 0,855

b) Bitte begründen Sie kurz Ihre Antwort!

Aufgabe 3:

a) Tausend zufällig ausgewählte Personen wurden über ihre Rauch- und Trinkgewohnheiten befragt. Die Resultate sind in der Tabelle zusammengestellt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Versuchsperson raucht und trinkt.

	Raucher	Nicht-Raucher
Trinker	320	530
Nicht-Trinker	20	130

Antwort: ___________________

b) Bitte begründen Sie kurz Ihre Antwort!

Aufgabe 4:

a) Ein Satz von 24 Karten ist mit positiven ganzen Zahlen von 1 bis 24 durchnummeriert. Die Karten werden gemischt, und eine Karte wird zufällig gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl auf dieser Karte durch 4 oder 6 teilbar ist?

☐ A. $\frac{1}{6}$ ☐ B. $\frac{5}{24}$ ☐ C. $\frac{1}{4}$ ☐ D. $\frac{1}{3}$ ☐ E. $\frac{5}{12}$

b) Bitte begründen Sie kurz Ihre Antwort!

Vielen herzlichen Dank, dass Sie sich den Aufwand gemacht haben, um bei diesem Test mitzuarbeiten.

Dass die Aufgaben alle vom Typ multiple choice sind, hat mehrere Gründe, der Hauptgrund ist wohl, dass sie leicht statistisch auszuwerten sind. Man muß natürlich im Hinterkopf behalten, dass "intelligentes Raten" auch zu Lösungen führen kann, die als richtig bewertet werden, auch wenn die Gedanken des Studenten vollkommen falsch gewesen sein mögen. Aus Gründen der Vergleichbarkeit bin ich jedoch dabei geblieben und habe die Aufgaben wort-wörtlich übernommen.

3.3. Lösungen der Aufgaben

3.3.1. Aufgabe 1

Die Lösung ist, dass es egal ist. Für diese Aufgabe gibt es zwei verschiedene Lösungswege, die unterschiedlich schwierig sind.

Lösungsweg 1: Wenn zwei Personen aus einer Urne mit 50 Kugeln jeweils abwechselnd eine Kugel ziehen, so endet jede Person mit 25 Kugeln. Ist nun eine der Kugeln weiß und die anderen schwarz, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel bei einer bestimmten Person ist, genau $\frac{1}{2}$. Somit ist es egal, ob als erster oder als zweiter gezogen wird.

Lösungsweg 2: Man kann sich den Vorgang als Baum bedingter Wahrscheinlichkeiten vorstellen. In dem Fall ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Person die weiße Kugel zieht

$$\frac{1}{50}+\frac{49}{50}\cdot\frac{48}{49}\cdot\frac{1}{48}+\frac{49}{50}\cdot\frac{48}{49}\cdot\frac{47}{48}\cdot\frac{46}{47}\cdot\frac{1}{46}+\ldots+\frac{49}{50}\cdot\frac{48}{49}\cdot\frac{47}{48}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ .$$

Da die Summe der Wahrscheinlichkeiten 1 ist, ist es demnach egal, ob man zuerst oder als zweiter zieht.

Lösungsweg 3: <u>Behauptung:</u> Wenn in einer Urne eine gerade Anzahl ($2\cdot n$) Kugeln liegen und genau eine davon andersfarbig ist und zwei Personen abwechselnd aus dieser Urne ziehen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Person die andersfarbige Kugel zieht, $\frac{1}{2}$.

<u>Beweis (durch Induktion nach *n*):</u>

<u>*n*=1:</u> Bei zwei Kugeln ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person, die als erste zieht, die andersfarbige Kugel zieht, $\frac{1}{2}$. Demnach ist für die andere Person die Wahrscheinlichkeit auch $\frac{1}{2}$.

<u>*n*⇒*n*+1:</u> Wenn aus einer Urne mit $2\cdot(n+1)=2\cdot n+2$ Kugeln zwei Kugeln gezogen sind und die andersfarbige Kugel noch in der Urne ist, so ist dies eine Urne mit $2\cdot n$ Kugeln, für die per Induktionsvoraussetzung die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ für beide Personen ist, die andersfarbige Kugel zu ziehen. Es gibt noch zwei weitere Fälle: Die Kugel wird im ersten Zug von der einen oder im zweiten Zug von der anderen Person gezogen. Im ersten Fall ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2\cdot n+2}$ und im zweiten Fall $\frac{2\cdot n+1}{2\cdot n+2}\cdot\frac{1}{2\cdot n+1}=\frac{1}{2\cdot n+2}$. Somit ist die Gesamtwahrscheinlichkeit, dass die erste Person die andersfarbige Kugel zieht

$$\frac{1}{2\cdot n+2}+\frac{2\cdot n+1}{2\cdot n+2}\cdot\frac{2\cdot n}{2\cdot n+1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1+n}{2\cdot n+2}=\frac{1}{2}$$

und die Gesamtwahrscheinlichkeit, dass die zweite Person die andersfarbige Kugel zieht

$$\frac{1}{2 \cdot n+2}+\frac{2 \cdot n+1}{2 \cdot n+2} \cdot \frac{2 \cdot n}{2 \cdot n+1} \cdot \frac{1}{2}=\frac{1+n}{2 \cdot n+2}=\frac{1}{2} .$$

Da 50 eine gerade Zahl ist, gilt dieser Beweis für unsere Aufgabe.

3.3.2. Aufgabe 2

Die Lösung ist A. 0,995. Hier haben wir einen Fall von bedingter Wahrscheinlichkeit. Dieses zu lösen gibt es zwei verschiedene Lösungswege, die jedoch fast identisch sind.

Lösungsweg 1: Gesucht werden all die Fälle, bei denen mindestens eine Alarmanlage anspricht. Das sind die Fälle A = dass die erste anspricht, B = dass die zweite anspricht und C = dass beide ansprechen. Die Wahrscheinlichkeiten sind: $P(A)=0{,}95 \cdot 0{,}1=0{,}095$, $P(B)=0{,}9 \cdot 0{,}05=0{,}045$, $P(C)=0{,}95 \cdot 0{,}9=0{,}855$. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten ist $0{,}095+0{,}045+0{,}855=0{,}995$.

Lösungsweg 2: Gesucht werden all die Fälle, bei denen mindestens eine Alarmanlage anspricht. Das ist genau dann der Fall, wenn nicht keine Alarmanlage anspricht, also die Differenz zwischen dem sicheren Ereignis und dem, dass keine Anspricht. Die Wahrscheinlichkeit, dass keine anspricht ist $0{,}1 \cdot 0{,}05=0{,}005$. Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine anspricht $1-0{,}005=0{,}995$.

3.3.3. Aufgabe 3

Die Lösung ist 32%.

Lösungsweg: Die Anzahl derer, die rauchen und trinken, sind von 1000 Personen genau 320. Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine der 1000 befragten Personen raucht und trinkt $\frac{320}{1000}=\frac{32}{100}=\frac{8}{25}=32$.

3.3.4. Aufgabe 4

Die Lösung ist D. 1/3.

Lösungsweg: Es gibt von den Zahlen 1 bis 24 genau 6 Karten, die durch 4 teilbar sind, nämlich {4, 8, 12, 16, 20, 24}. Es gibt von den Zahlen 1 bis 24 genau 4 Karten

3.4. Auswertung

3.4.1. Statistische Auswertung

Als erstes steht eine statistische Auswertung der Lösungen an.

Vergleichsdaten					
	Aufgabe 1	***Aufgabe 2***	***Aufgabe 3***	***Aufgabe 4***	***Anzahl der Personen***
TIMSS International		29%	51%	50%	
TIMSS Deutschland		21%	42%	46%	
TIMSS Deutschland: Leistungskurs		15%	34%	40%	
TIMSS Deutschland: Grundkurs		30%	62%	62%	
Forschung Christoph Ungruhe	29%				129
Forschung Christian Datzko					
Insgesamt	16%	45%	68%	62%	69
Mathematikstudenten	21%	41%	62%	62%	29
Männlich	18%	52%	79%	67%	33
Weiblich	14%	39%	58%	58%	36
Schule LK	19%	51%	74%	66%	47
Schule GK	9%	32%	55%	55%	22
Vorgebildet	22%	56%	67%	64%	45
Nicht vorgebildet	4%	25%	71%	58%	24

In dieser Tabelle gibt die Prozentzahl die Wahrscheinlichkeit an, dass, wenn ich einen Beliebigen aus der Menge der gestesteten Personen ziehe, dieser die Aufgabe richtig gelöst. In anderen Worten ist dies die Lösungswahrscheinlichkeit der Gruppe und Aufgabe.

Als letztes bleibt noch festzustellen, wie viele Studenten jeweils wie viele Prozent der Aufgaben gelöst haben. Dies ist in folgender Tabelle festgehalten:

0%	***25%***	***50%***	***75%***	***100%***
9	16	22	16	6

3.4.2. Genauere Betrachtung der Ergebnisse

Aufgabe 1: Bei der Betrachtung dieser Aufgabe fällt zuerst einmal auf, dass das Ergebnis im Vergleich zur Forschung von Christoph Ungruhe ziemlich schlecht ausgefallen ist. Festzuhalten ist folgendes: Mathematikstudenten sind besser als der Durchschnitt, männliche Studenten besser als weibliche, Studenten, die den Leistungskurs Mathematik in der Schule hatten, sind besser als die mit Grundkurs und diejenigen, die Wahrscheinlichkeit in der Schule oder im Studium hatten, sind besser als die, die es nicht hatten - hier hat sich die Ausbildung anscheinend gelohnt.

Aufgabe 2: Hier ist nun eine deutliche Verbesserung gegenüber TIMSS festzustellen. Die Mathematikstudenten sind allerdings diesmal schlechter als der Durchschnitt. Ansonsten das bekannte Bild, vielleicht etwas schärfer noch: männliche besser als weibliche, LK-Besucher besser als GK-Besucher und vorgebildete besser als nicht vorgebildete.

Aufgabe 3: Für diese Aufgabe scheint kaum Verbesserungspotential vorhanden gewesen sein, auch sind die Unterschiede zwischen den Gruppen diesmal nicht so stark. Mathematikstudenten sind schlechter als der Durchschnitt, männlich besser als weiblich, LK besser als GK, aber die nicht vorgebildeten sind bei dieser Aufgabe besser zurande gekommen als die vorgebildeten.

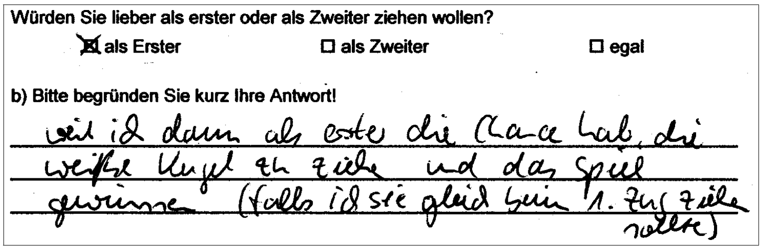
Aufgabe 4: Die letzte Aufgabe birgt auch kaum Überraschungen. Kaum besser als die TIMSS-Ergebnisse heben sich auch die Mathematikstudentenergebnisse nicht groß heraus. Ansonsten das übliche Bild: männlich besser als weiblich, LK besser als GK und vorgebildet besser als nicht vorgebildet.

Zusammengefasst sind die Beobachtungen folgende: Bei der Aufgabe 1 ist eine deutliche Verschlechterung der Ergebnisse festzustellen, während bei den Aufgaben 2 - 4, die mit der TIMSS/III-Studie verglichen werden, eine zumindest minimale Verbesserung festzustellen ist. Durchgehend ist es so, dass Studenten, die männlich sind, besser sind als die, die weiblich sind. Desgleichen ist festzustellen, dass Studenten, die einen Mathematik-Leistungskurs während ihrer Schulzeit besucht haben, besser sind als solche, die einen Grundkurs besucht haben. Zuletzt ist in fast allen Aufgaben (bis auf Aufgabe 3) die Vorbildung nützlich gewesen.

3.4.3. Exemplarische Betrachtung von Begründungen der Lösungen

Die Lösungen der Studenten und Studentinnen sind ohne Sortierschlüssel mit Nummern versehen worden, dass man bei Bedarf nachschauen könnte, was sie bei anderen Aufgaben für Lösungen gegeben haben.

3.4.3.1. Aufgabe 1


Würden Sie lieber als erster oder als Zweiter ziehen wollen?

☒ als Erster ☐ als Zweiter ☐ egal

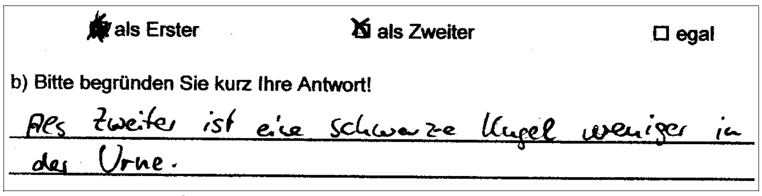
b) Bitte begründen Sie kurz Ihre Antwort!

weil ich dann als erster die Chance hab, die weiße Kugel zu ziehen und das Spiel gewinnen (falls ich sie gleich beim 1. Zug ziehen wollte)

Aufgabe 1 – Lösungsversuch 1 (Studentin 3)

Diese Studentin ist leider nicht sehr weit gegangen mit ihren Überlegungen. Sie scheint sich noch nicht einmal Gedanken darüber gemacht zu haben, wie die Wahrscheinlichkeiten sind.

Studentin 3								
Alter	***Geschlecht***	***Studienrichtung Mathe***	***Mathe-LK***	***Vorgebildet***	***Aufgabe 1***	***Aufgabe 2***	***Aufgabe 3***	***Aufgabe 4***
20	W	nein	ja	ja	nein	nein	ja	ja


☒ als Erster ☒ als Zweiter ☐ egal

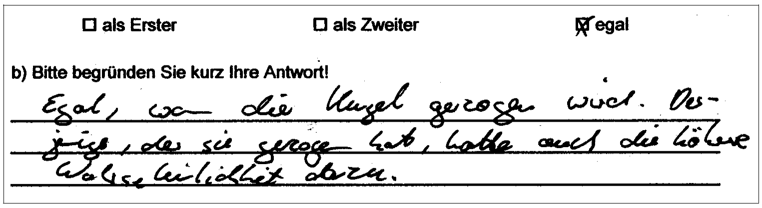
b) Bitte begründen Sie kurz Ihre Antwort!

Als Zweiter ist eine schwarze Kugel weniger in der Urne.

Aufgabe 1 – Lösungsversuch 2 (Student 44)

Dieser Student scheint schon etwas weiter gedacht zu haben: Er hat sich Gedanken über die Wahrscheinlichkeit gemacht, dass die weiße Kugel gleich als erstes gezogen wird ($\frac{1}{50}$) und dann überlegt, wie wahrscheinlich dies ist, wenn schon eine schwarze Kugel gezogen wurde ($\frac{1}{49}$). Er hat aber leider nicht konsequent zuende gedacht.

Student 44								
Alter	***Geschlecht***	***Studien-richtung Mathe***	***Mathe-LK***	***Vorge-bildet***	***Aufgabe 1***	***Aufgabe 2***	***Aufgabe 3***	***Aufgabe 4***
21	M	ja	ja	ja	nein	ja	ja	ja


☐ als Erster ☐ als Zweiter ☒ egal

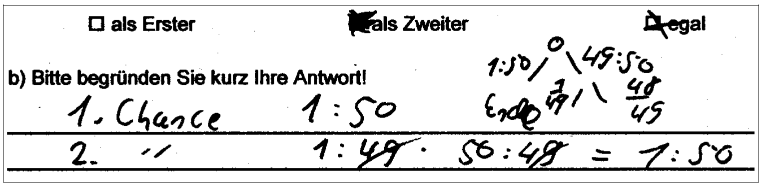
b) Bitte begründen Sie kurz Ihre Antwort!

Egal, wo die Kugel gezogen wird. Derjenige, der sie gezogen hat, hatte auch die höhere Wahrscheinlichkeit dazu.

Aufgabe 1 – Lösungsversuch 3 (Student 28)

Diesem Studenten muss man leider eine fehlerhafte Vorstellung von Wahrscheinlichkeit attestieren. Wenn man seine Aussage für bare Münze nähme, so würde daraus folgern, dass die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses davon abhängt, dass das Ereignis schon eingetreten ist! Dabei ist es doch eher so, dass die Wahrscheinlichkeit eine Aussage machen möchte, wie wahrscheinlich es ist, dass ein Ereignis eintreten wird! Es ist leider auch keine begründete Annahme möglich, dass er einen Lösungsweg gewählt hat, der adäquat ist. Dass er das Richtige angekreuzt hat, ist als Zufall anzusehen, nämlich dass seine verquere Vorstellung das richtige Ergebnis bringt.

Student 28								
Alter	***Geschlecht***	***Studien-richtung Mathe***	***Mathe-LK***	***Vorge-bildet***	***Aufgabe 1***	***Aufgabe 2***	***Aufgabe 3***	***Aufgabe 4***
21	M	nein	ja	ja	ja	ja	ja	ja


☐ als Erster ■ als Zweiter ~~☒~~ egal

b) Bitte begründen Sie kurz Ihre Antwort!

1:50 / 0 \ 49:50

Ende 1/49 / \ 48/49

1. Chance 1:50

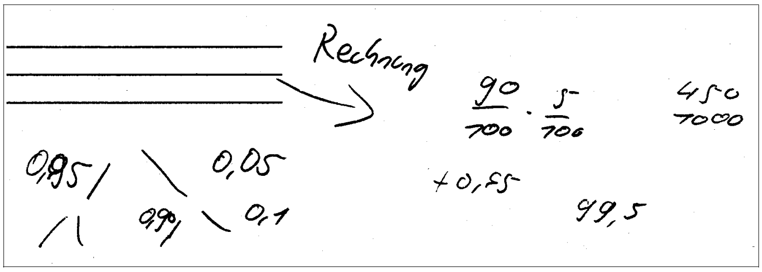
2. 〃 1:49 · 50:49 = 1:50

Aufgabe 1 – Lösungsversuch 4 (Student 52)

Dieses ist ein sehr interessanter Lösungsversuch. Er hat, wie einige andere Studenten auch, versucht, das Problem über einen Baum zu lösen. Er hat zwar auch dieses nicht konsequent zu ende gedacht, aber im Gegensatz zu den anderen den wesentlichen Schritt gemacht, nämlich herausgefunden, dass die Wahrscheinlichkeit beim zweiten mal Ziehen genauso groß ist wie beim ersten mal. Dies hatten die anderen größtenteils falsch bewertet. So kommt er – begründet – zu dem Ergebnis, dass die Wahrscheinlichkeit gleich groß ist. Er hat scheinbar nur eine Sache nicht bedacht, was passiere, wenn ein drittes mal gezogen werden muss. Dass dies in diesem Fall (50 Kugeln) nicht tragisch ist, hat er zumindest nicht aufgeschrieben. Aber im Vergleich zu den anderen Lösungsversuchen ist diese eine (fast) richtige Lösung.

Student 52								
Alter	***Geschlecht***	***Studien-richtung Mathe***	***Mathe-LK***	***Vorge-bildet***	***Aufgabe 1***	***Aufgabe 2***	***Aufgabe 3***	***Aufgabe 4***
23	M	ja	ja	ja	ja	ja	ja	nein

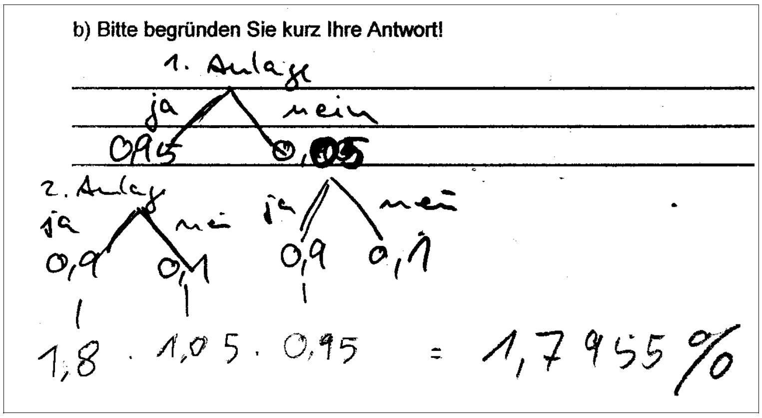
3.4.3.2. Aufgabe 2



Aufgabe 2 – Lösungsversuch 1 (Student 52)

Als Begründung für die (richtige) Lösung der Aufgabe 2 hat dieser Student einfach nur diese paar Zahlen hingeschrieben, links ist eine Andeutung eines Baumes zu sehen und rechts ein paar Zahlen. Ich denke, er hat die richtige Vorstellung gehabt und auch richtig gerechnet, jedoch entweder keine Lust gehabt, es richtig zu notieren oder gar nicht die Fähigkeit dazu gehabt. Aber den Zahlen kann man entnehmen, dass seine Gedanken und Rechnungen richtig gewesen sind.

Student 52								
Alter	***Geschlecht***	***Studienrichtung Mathe***	***Mathe-LK***	***Vorgebildet***	***Aufgabe 1***	***Aufgabe 2***	***Aufgabe 3***	***Aufgabe 4***
23	M	ja	ja	ja	ja	ja	ja	nein



Aufgabe 2 – Lösungsversuch 2 (Studentin 8)

Dieser Lösungsversuch ist ein leuchtendes Beispiel dafür, dass die Vorbildung nichts genützt hat, ich wage sogar zu behaupten, eher geschadet hat. Denn was hat sie gemacht: Sie wusste, dass man diese Aufgabe über einen Baum lösen kann, und dass man an den Ästen die Wahrscheinlichkeiten notiert. Dann werden die Ergebnisse multipliziert und addiert – aber wer wird mit wem multipliziert und wer mit wem addiert? Genau dieses hat sie dann leider vertauscht und ist konsequent zu einem Ergebnis gekommen, das vollkommen falsch ist. Per definitionem kann es gar nicht richtig sein, denn ihr eigentliches Ergebnis (179,55%) ist kein möglicher Funktionswert des Wahrscheinlichkeitmaßes. Hinzu kommt noch, dass sie die absolute Zahl 1,7955 (die auch noch ein wenig falsch errechnet ist) einfach mit einem %-Zeichen versieht, so dass es wieder plausibel aussieht. Ihr fällt nicht auf, dass dies keine Lösung der Aufgabe ist, kreuzt demnach auch einfach nichts an.

Folgendes sehe ich bei ihr: Sie überprüft ihre Rechnung und die Ergebnisse nicht auf Plausibilität und baut ihr mathematisches Wissen nur auf dunkle Erinnerungen auf, die anscheinend aber nicht gut fundiert sind.

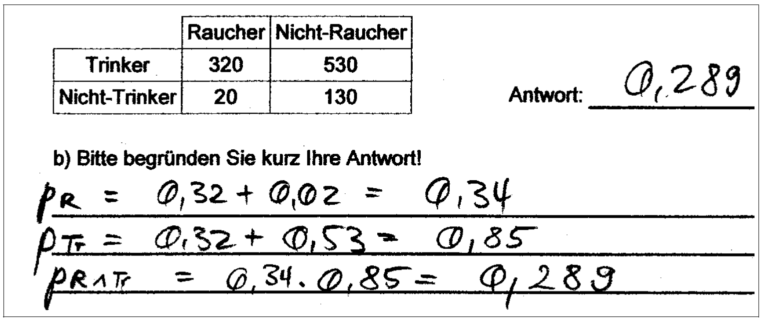
Mit diesem Beispiel hat man übrigens ein gutes Argument dafür, dass bedingte Wahrscheinlichkeit (die ja hier eine wesentliche Rolle spielt) begründet und bewiesen unterrichtet werden sollte, dass

Schüler die Möglichkeit haben, die Zusammenhänge zu verstehen, anstatt dass man sie einfach die Pfadregeln auswendig lernen läßt.

Studentin 8								
Alter	***Geschlecht***	***Studien-richtung Mathe***	***Mathe-LK***	***Vorge-bildet***	***Aufgabe 1***	***Aufgabe 2***	***Aufgabe 3***	***Aufgabe 4***
19	W	ja	nein	ja	nein	nein	nein	ja

Interessant ist der Vergleich der Lösungsversuche 1 und 2 dieser Aufgabe. Hier stehen sich zwei Extreme gegenüber – der eine, der die richtige Lösung errechnet und die andere, die in der Notation ordentlicher ist und sich ein wenig mehr auskennt – der eine, der weiß, was er macht, und die andere, die weiß, wie sie es notiert. Im Unterricht hat man meistens beide Sorten von Schülern, die man dann irgendwie zusammenbringen muss, eine nicht triviale Aufgabe.

3.4.3.3. Aufgabe 3



	Raucher	Nicht-Raucher
Trinker	320	530
Nicht-Trinker	20	130

Antwort: 0,289

b) Bitte begründen Sie kurz Ihre Antwort!

$p_R = 0,32 + 0,02 = 0,34$

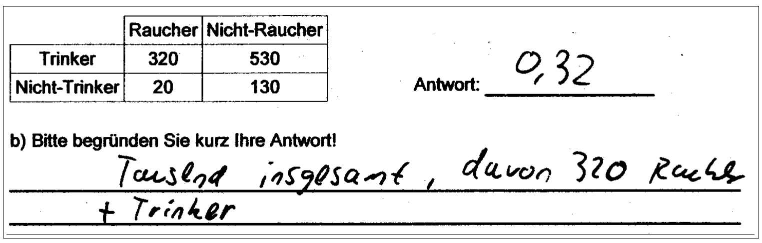
$p_{Tr} = 0,32 + 0,53 = 0,85$

$p_{R \wedge Tr} = 0,34 \cdot 0,85 = 0,289$

Aufgabe 3 – Lösungsversuch 1 (Student 15)

Die Rechnungen und Notationen sehen sehr gebildet aus, der Student ist vorgebildet, das merkt man. Ich befürchte nur, dass er ein wenig zu gebildet ist, dass er die Einfachheit der Aufgabe nicht erkennt. Er mittelt die Daten erst, bevor er sie wieder miteinander verknüpft. Das Ergebnis ist dann leider falsch, aber – es sieht doch gut aus, was er da geschrieben hat, oder?

Student 15								
Alter	***Geschlecht***	***Studien-richtung Mathe***	***Mathe-LK***	***Vorge-bildet***	***Aufgabe 1***	***Aufgabe 2***	***Aufgabe 3***	***Aufgabe 4***
21	M	nein	ja	ja	nein	ja	nein	ja



	Raucher	Nicht-Raucher
Trinker	320	530
Nicht-Trinker	20	130

Antwort: 0,32

b) Bitte begründen Sie kurz Ihre Antwort!

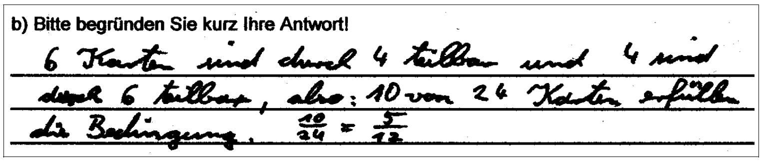
Tausend insgesamt, davon 320 Raucher + Trinker

Aufgabe 3 – Lösungsversuch 2 (Student 52)

Auch hier hat Student 52 die Aufgabe erkannt und gelöst – die Begründung ist so simpel wie die Aufgabe selber. Da braucht man nichts zu zu sagen außer: Weiter so!

Student 52								
Alter	***Geschlecht***	***Studienrichtung Mathe***	***Mathe-LK***	***Vorgebildet***	***Aufgabe 1***	***Aufgabe 2***	***Aufgabe 3***	***Aufgabe 4***
23	M	ja	ja	ja	ja	ja	ja	nein

3.4.3.4. Aufgabe 4

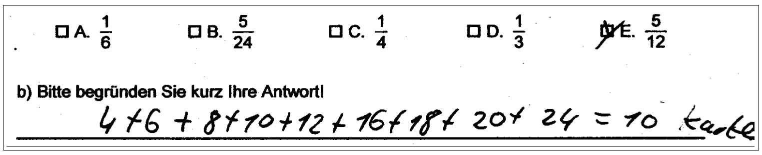

b) Bitte begründen Sie kurz Ihre Antwort!

6 Karten sind durch 4 teilbar und 4 sind durch 6 teilbar, also: 10 von 24 Karten erfüllen die Bedingung. $\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$

Aufgabe 4 – Lösungsversuch 1 (Student 12)

Dieser Lösungsversuch zeigt einen typischen Fehler: Man überlegt sich, wie viele Karten denn durch 4 und wie viele durch 6 teilbar sind, addiert sie und schon hat man, wie viele Karten durch 4 und durch 6 teilbar sind. Da müssten eigentlich die metakognitiven Alarmglocken schellen und ihn darauf hinweisen, dass dies nicht notwendigerweise so sein muss, es könnte ja sein, dass es Karten gibt, die sowohl durch 4 als auch durch 6 teilbar sind (wie in diesem Falle 12 und 24). Leider hat dieser Student das nicht bedacht und munter das Ergebnis angekreuzt.

Student 12								
Alter	***Geschlecht***	***Studienrichtung Mathe***	***Mathe-LK***	***Vorgebildet***	***Aufgabe 1***	***Aufgabe 2***	***Aufgabe 3***	***Aufgabe 4***
20	M	nein	ja	ja	nein	ja	ja	nein


☐ A. $\frac{1}{6}$ ☐ B. $\frac{5}{24}$ ☐ C. $\frac{1}{4}$ ☐ D. $\frac{1}{3}$ ☒ E. $\frac{5}{12}$

b) Bitte begründen Sie kurz Ihre Antwort!

4+6+8+10+12+16+18+20+24 = 10 Karte

Aufgabe 4 – Lösungsversuch 2 (Student 52)

„Übermut tut selten gut“ – diesen Spruch möchte ich dem Studenten 52 zurufen. Nachdem er gut die ersten drei Aufgaben gelöst hat (siehe oben), geht er nun auch ganz forsch an die Aufgabe ran und übersieht, dass zum einen die 10 weder durch 4 noch durch 6 teilbar ist und dass er nur 9 Karten aufgeschrieben hat. Diesen groben Schnitzer kann ich mir nur als Flüchtigkeitsfehler erklären – die Gedanken im Kopf sind dabei richtig gewesen. Leider hat er aber durch seine Eile die Überprüfung sein gelassen.

Student 52								
Alter	***Geschlecht***	***Studienrichtung Mathe***	***Mathe-LK***	***Vorgebildet***	***Aufgabe 1***	***Aufgabe 2***	***Aufgabe 3***	***Aufgabe 4***
23	M	ja	ja	ja	ja	ja	ja	nein

3.4.4. Interpretation der Ergebnisse

Als erstes bleibt festzuhalten, dass die Gestaltung des Tests gelungen war – es sind Lösungsversuche mit 100% Richtigkeit und welche mit 0% Richtigkeit vorhanden, die meisten Studenten haben um die 50% richtig gehabt. Alleine die erste Aufgabe scheint etwas zu schwer gewesen zu sein, dort sind die meisten richtigen Lösungen aufgrund von Zufall entstanden.

Festgestellt wurde: Allgemein sind die Studenten, die getestet wurden, besser als die 12-Klässler, die getestet wurden. Dies jedoch erfordert keine großartigen Erklärungsversuche – die Studenten sind schlichtweg mindestens 2 Jahre älter und zudem noch eine Auswahl, die sich eher für Mathematik interessiert.

Interessanter sind deshalb die Lösungsansätze und Begründungen, die die Studenten geliefert haben: Es scheint zwei Kategorien von Studenten zu geben: Die einen, die den Überblick haben, die Wahrscheinlichkeitsrechnung verstanden zu habe scheinen und für die sie kein Problem darstellen im Kopf, die dafür aber Defizite in einer strukturierten Darstellungsweise haben und zum anderen diejenigen, die zwar Ahnung von der Darstellung von Ergebnissen haben, die jedoch wenig Verständnis von dem haben, was sie machen. Eine weitere Beobachtung war zu machen: Gerade in der Vorlesung vor dem Test wurde der Binominalkoeffizient eingeführt (mit dem man bedingte Wahrscheinlichkeit nach dem Schema „ohne zurücklegen“ und „ohne Berücksichtigung der Reihenfolge“ berechnen kann). Dieser tauchte zusammenhangslos und ohne Begründung bei mehreren Aufgaben einfach so auf. Dies führt zu dem Schluss, dass diese nicht-verstehenden Studenten sehr Kalkül-orientiert gearbeitet haben, was im Sinne eines Verständnis-geleiteten Unterrichts, wie ich ihn oben angerissen habe, eher schädlich als nützlich ist. Sie scheinen einfach Formeln und Notationsformen im Hinterkopf zu haben und diese mit mehr oder weniger Überlegung anzuwenden. Hier müsste man sagen: Der Unterricht sollte sich hin zu einem Unterricht ändern, der mehr das Verständnis von Problemlöseverfahren fördert. Bei den anderen jedoch stellt man fest, dass sie nicht so recht wissen, wie genau sie etwas aufschreiben. Prinzipiell sind ja Ideen vorhanden, jedoch sind diese nicht bis ins letzte durchdacht und verinnerlicht. Deshalb denke ich, man sollte den Unterricht auch dahingehend verändern, dass Präzsion in der Darstellung verinnerlicht wird, wie es die Mathematik ja eigentlich auch fordert. Die Erfolge liegen dabei auf der Hand: Zum einen entstehen weniger Fehler durch falsche Interpretation des notierten und zum anderen kann man in einer präzisen Notation seine eigenen Gedanken bis ins letzte durchdenken und verarbeiten.

Zusammengefasst sind also die Ergebnisse: Eine stärkere Verständnis-Orientierung und eine größere Sorgfalt in Hinsicht auf Präzision der Darstellung könnten die Ergebnisse noch einmal immens verbessern, jedoch sind die jetzigen Ergebnisse durchaus im Durchschnitt.

4. Literaturverzeichnis

[Athen WuSt]: Athen, Hermann: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*, Paderborn, 1968.
[Sjuts Mathematik als Werkzeug]: Sjuts, Johann: *Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation: theoretische Einordnung, konzeptionelle Abgrenzung und interpretative Auswertung eines kognitions- und konstruktivismusgeleiteten Mathematikunterrichts*, Osnabrück, 1999.
[Stochastik MS 2]: Deutsches Institut für Fernstudien an der Universität Tübingen: *Studienbriefe zur Fachdidaktik für Lehrer der Sekundarstufe II: Stochastik MS 2 Zugänge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Tübingen, 1973.
[TIMSS/III]: IEA TIMSS-Germany, Berlin: *Testaufgaben der Dritten Internationalen Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie, Population 3 (TIMSS/III)*, http://www.timss.mpg.de/, 2001.
[Wahrscheinlichkeit-Schüler]: Cohors-Fresenborg, Elmar / Kaune, Christa / Griep, Mathilde: *Rechnen mit dem Ungewissen - Textbuch für Schüler*, Osnabrück, 1994.