HAMILTONsche Tripel in alternativen Algebren

Dies ist der Vortrag über HAMILTONsche Tripel in alternativen Algebren, gehalten im Rahmen des Seminars zur Algebra unter Prof. Dr. Winfried Bruns und Juniorprof. Dr. Tim Römer im WS 2003/04. Es ist eine Ausarbeitung des §1 von Kapitel 8 aus dem Buch H.-D. Ebbinghaus et al.: *Zahlen*, Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1992.

Christian Datzko
Matrikel-Nr.: 852245
Universität: Universität Osnabrück
Studiengang: Lehramt Gymnasium
Fächer: Mathematik, Musik und Informatik
9. Semester (WS 2003/04)

Buersche Str. 70
49084 Osnabrück
Telefon: 0541-6853370
Fax: 0541-6853380
Email: datzko@t-online.de

Stand der Datei: 15. Mai 2004.

Vorbemerkungen

Bisher haben wir die Quaternionen als ein Beispiel für eine vierdimensionale $\mathbb{R}$-Algebra mit einer durch die HAMILTONschen Multiplikationstabelle definierten Multiplikation kennengelernt. In diesem Vortrag soll es nun darum gehen, dieses Multiplikationsverhalten als eigenständige Definition zu sehen, die sich in allgemeinen Algebren als wichtig erweist. Insbesondere wollen wir die Existenz von HAMILTONschen Tripeln unter bestimmten Bedingungen untersuchen.

So kommen wir also zu folgender

Definition 0.1. In einer Algebra $\mathscr{A}$ mit Einselement e nennt man die drei Elemente u, v und w ein HAMILTON*sches Tripel*, wenn die neun HAMILTON-*Bedingungen* erfüllt sind:

$$\begin{aligned} u^2 = v^2 = w^2 &= -e \\ w = uv &= -vu \\ u = vw &= -wv \\ v = wu &= -uw \end{aligned} \tag{1}$$

1 Die rein-imaginären Elemente einer Algebra

Aus Kapitel 7, §3 kennen wir noch den Imaginärraum von $\mathbb{H}$. Dort haben wir folgende Definition gehabt:

Definition 1.1. In den $\mathbb{R}$-Algebren $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ bezeichnet man die Menge der Elemente $x \notin \mathbb{R}e \backslash \{0\}$, für die $x^2 \in \mathbb{R}e$ gilt, als *Imaginärraum*, also die Menge aller imaginären Elemente, deren Quadrat reell ist.

Dies können wir auch für eine allgemeinde $\mathbb{R}$-Algebra $\mathscr{A}$ tun:

Definition 1.2. Für jede $\mathbb{R}$-Algebra $\mathscr{A}$ ist

$$\operatorname{Im} \mathscr{A} := \{x \in \mathscr{A} : x^2 \in \mathbb{R}e \text{ und } x \notin \mathbb{R}e \setminus \{0\}\} \tag{2}$$

die Menge der *rein-imaginären* Elemente.

Trivialerweise gelten folgende Aussagen über $\operatorname{Im} \mathscr{A}$:

$$\mathbb{R}e \cap \operatorname{Im} \mathscr{A} = \{0\} \tag{3}$$

$$u \in \operatorname{Im} \mathscr{A} \Rightarrow \alpha u \in \operatorname{Im} \mathscr{A} \qquad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Gleichung 3 können wir uns sofort klar machen, und für Gleichung 4 genügt es, sich anzuschauen, daß die beiden Bedingungen, daß ein Element in Im $\mathscr{A}$ liegt, invariant gegenüber der Multiplikation mit einem Skalar ist.

Allerdings folgt aus diesem noch nicht, daß Im $\mathscr{A}$ notwendigerweise ein Untervektorraum von $\mathscr{A}$ ist. Ohne weiteres gilt *nicht*, daß

$$u, v \in \text{Im } \mathscr{A} \Rightarrow u + v \in \text{Im } \mathscr{A} \tag{5}$$

Wann dies der Fall ist, wird im nächsten Paragraphen unter Punkt 2 vorgestellt.

Im allgemeinen Fall gilt jedoch das

Lemma 1.3. (Unabhängigkeitslemma) Sind $u, v \in \text{Im } \mathscr{A}$ linear unabhängig, so sind auch e, u, v linear unabhängig.

Beweis. Wären u, v und e nicht linear unabhängig, dürften wir also ohne Einschränkung

$$v = \alpha e + \beta u \qquad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

für geeignete α und β annehmen.

Durch Quadrieren und Umstellen sehen wir:

$$\begin{aligned} v &= \alpha e + \beta u \\ v^2 &= \alpha^2 e^2 + 2\alpha\beta u + \beta^2 u^2 \\ 2\alpha\beta u &= v^2 - \alpha^2 e - \beta^2 u^2 \end{aligned}$$

Da nun aber $v^2, -\alpha^2 e$ und $-\beta^2 u^2 \in \mathbb{R}e$ gilt, müßte auch $2\alpha\beta u \in \mathbb{R}e$ gelten, und da $u \notin \mathbb{R}e$ ist, gilt:

$$\alpha\beta = 0$$

Dies wiederum jedoch hätte zur Folge, daß entweder $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ gilt, womit der Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von u und v bzw. zu $v \in \text{Im } \mathscr{A}$ gegeben ist. □

Da die folgenden Gleichungen für $u, v \in \text{Im } \mathscr{A}$ gelten:

$$\begin{aligned} (u+v)^2 &= u^2 + uv + vu + v^2 \\ uv + vu &= (u+v)^2 - u^2 - v^2 \in \mathbb{R}e \end{aligned}$$

können wir des Weiteren sagen:

$$u, v, u + v \in \text{Im } \mathscr{A} \Rightarrow uv + vu \in \mathbb{R}e \tag{6}$$

Satz 1.4. Ist $\mathscr{A}$ nullteilerfrei, so gilt $u^2 = -\omega e$ mit $\omega > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ für $u \in \operatorname{Im} \mathscr{A}$, $u \neq 0$.

Beweis. Nach Definition von $\operatorname{Im} \mathscr{A}$ gilt $u^2 = \alpha e$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Wäre $\alpha \geq 0$, könnten wir α durch β definiert als $\beta^2 := \alpha$ mit $\beta \in \mathbb{R}$ ersetzen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= u^2 - \alpha e \\ &= u^2 - \beta^2 e \\ &= (u - \beta e)(u + \beta e) \end{aligned}$$

Da $\mathscr{A}$ jedoch nullteilerfrei ist, muß einer der beiden Faktoren $(u - \beta e)$ und $(u + \beta e)$ gleich 0 sein, was zu $u \in \mathbb{R}e$ führt und ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. □

Korollar 1.5. In nullteilerfreien Algebren kann man (wie bei $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$) eine Normierung vornehmen, indem man jedes rein-imaginäre Element $u' \neq 0$ durch ein geeignetes Skalar γ in ein Element $u = \gamma u'$ mit $u^2 = -e$ übergehen läßt. Für dieses γ gilt übrigens $\gamma = \frac{1}{\sqrt{\omega}}$ mit dem ω aus Satz 1.4.

2 HAMILTONsche Tripel

Satz 2.1. Jedes Element eines HAMILTONschen Tripels ist rein-imaginär.

Beweis. Der Beweis dieses Satzes ist einfach: die erste Bedingung, daß $x^2 \in \mathbb{R}e$ ist, kann man an der Definition ablesen, und daß $x \notin \mathbb{R}e \setminus \{0\}$ ist, folgt daraus, daß es kein Element $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt mit $x = \alpha e$, so daß $\alpha^2 e = -e$ gilt. □

Satz 2.2. Ist u, v und w ein HAMILTONsches Tripel in $\mathscr{A}$, so gilt:

1. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{H} &\rightarrow \mathscr{A} \\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) &\mapsto \alpha e + \beta u + \gamma v + \delta w \end{aligned} \tag{7}$$

   ist ein Algebra-Monomorphismus.

2. $\mathbb{R}u + \mathbb{R}v + \mathbb{R}w \subset \operatorname{Im} \mathscr{A}$, speziell enthält $\operatorname{Im} \mathscr{A}$ einen 3-dimensionalen Untervektorraum.

Beweis. 1. Um zu zeigen, daß f ein Monomorphismus ist, muß gezeigt werden, daß f ein Homomorphismus ist, und daß f injektiv ist.

Daß f ein Homomorphismus ist, ist schnell klar, da $f(e) = e, f(i) = u, f(j) = v$ und $f(k) = w$. Somit ist

$$\begin{aligned}
f(xy) &= f((\alpha_1 e + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k)(\alpha_2 e + \beta_2 i + \gamma_2 j + \delta_2 k)) \\
&= f(\alpha_1\alpha_2 e + \alpha_1\beta_2 i + \alpha_1\gamma_2 j + \alpha_1\delta_2 k + \beta_1\alpha_2 i + \beta_1\beta_2 i^2 \\
&\quad + \beta_1\gamma_2 ij + \beta_1\delta_2 ik + \gamma_1\alpha_2 j + \gamma_1\beta_2 ji + \gamma_1\gamma_2 j^2 + \gamma_1\delta_2 jk \\
&\quad + \delta_1\alpha_2 k + \delta_1\beta_2 ki + \delta_1\gamma_2 kj + \delta_1\delta_2 k^2) \\
&= \alpha_1\alpha_2 e + \alpha_1\beta_2 u + \alpha_1\gamma_2 v + \alpha_1\delta_2 w + \beta_1\alpha_2 u + \beta_1\beta_2 u^2 \\
&\quad + \beta_1\gamma_2 uv + \beta_1\delta_2 uw + \gamma_1\alpha_2 v + \gamma_1\beta_2 vu + \gamma_1\gamma_2 v^2 + \gamma_1\delta_2 vw \\
&\quad + \delta_1\alpha_2 w + \delta_1\beta_2 wu + \delta_1\gamma_2 wv + \delta_1\delta_2 w^2 \\
&= (\alpha_1 e + \beta_1 u + \gamma_1 v + \delta_1 w)(\alpha_2 e + \beta_2 u + \gamma_2 v + \delta_2 w) \\
&= f((\alpha_1 e + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k)) f((\alpha_2 e + \beta_2 i + \gamma_2 j + \delta_2 k)) \\
&= f(x)f(y)
\end{aligned}$$

Die Injektivität von f ist äquivalent damit, daß $e, u, v, w \in \mathscr{A}$ linear unabhängig sind. Dies können wir uns relativ schnell klar machen, wenn wir überlegen, was Injektivität bedeutet: Es gibt nur ein Quadrupel $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, so daß $f(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0$. Also können wir folgern:

$$\begin{gathered}
f(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \alpha e + \beta u + \gamma v + \delta w = 0 \\
\Leftrightarrow (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0, 0, 0, 0)
\end{gathered}$$

Daß e, u, v und w linear unabhängig sind, ist äquivalent zu demselben:

$$\begin{gathered}
\alpha e + \beta u + \gamma v + \delta w = 0 \\
\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0 \\
\Leftrightarrow (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0, 0, 0, 0)
\end{gathered}$$

Zuerst ist klar, daß u und v linear unabhängig sind, da sonst $v \in \mathbb{R}u$ und somit $vu = uv$, also $w = -w$, also $w = 0$, was jedoch im Widerspruch zu $w^2 = -e$ steht.

Nach dem Unabhängigkeitslemma 1.3 sind nun auch e, u und v linear unabhängig.

Wären jetzt jedoch e, u, v und w linear abhängig, so gäbe es *eindeutig* bestimmte Zahlen $\rho, \sigma, \tau \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$w = uv = \rho e + \sigma u + \tau v$$

Gäbe es mehrere Darstellungen, so könnten wir schreiben, indem wir zwei verschiedene Darstellungen von w nehmen:

$$\begin{aligned} 0 &= w - w \\ &= (\rho e + \sigma u + \tau v) - (\rho' e + \sigma' u + \tau' v) \end{aligned}$$

Hieraus folgt allerdings wegen der linearen Unabhängigkeit von e, u und v, daß $\rho = \rho'$, $\sigma = \sigma'$ und $\tau = \tau'$, was ein Widerspruch dazu ist, daß $\rho e + \sigma u + \tau v$ und $\rho' e + \sigma' u + \tau' v$ zwei verschiedenen Darstellungen von w sind.

Wir setzen also an:

$$\begin{aligned} w = uv &= \rho e + \sigma u + \tau v \\ uuv &= \rho u + \sigma u^2 + \tau uv \\ -v &= \rho u - \sigma e + \tau w \\ \tau w &= -\rho u + \sigma e - v \\ w &= \frac{\sigma e}{\tau} + \frac{-\rho u}{\tau} + \frac{-v}{\tau} \end{aligned}$$

Wir durften durch τ teilen, da $\tau \neq 0$ gelten muß, weil sonst $-v = \rho u - \sigma e + 0w$ eine Darstellung von v durch u und e wäre, was nicht geht, da e, u und v schon linear unabhängig sind.

Aufgrund der Eindeutigkeit jedoch muß $\tau = \frac{-1}{\tau} \Leftrightarrow \tau^2 = -1$ gelten, was ein Widerspruch zu $\tau \in \mathbb{R}$ ist.

Somit haben wir auch die Injektivität des Homomorphismus gezeigt.

2. Damit $\mathbb{R}u+\mathbb{R}v+\mathbb{R}w \subset \mathrm{Im}\,\mathscr{A}$ gilt, müssen die beiden Bedingungen für Elemente in $\mathrm{Im}\,\mathscr{A}$ für alle Elemente der Menge $\mathbb{R}u+\mathbb{R}v+\mathbb{R}w$ überprüft werden. Da klar ist, daß gilt $x \in \mathbb{R}u + \mathbb{R}v + \mathbb{R}w \Rightarrow x \notin \mathbb{R}e \setminus \{0\}$, muß noch überprüft werden, ob gilt $x \in \mathbb{R}u + \mathbb{R}v + \mathbb{R}w \Rightarrow x^2 \in \mathbb{R}e$:

$$\begin{aligned} (\beta u + \gamma v + \delta w)^2 &= (\beta u + \gamma v + \delta w)(\beta u + \gamma v + \delta w) \\ &= \beta^2 u^2 + \beta\gamma uv + \beta\delta uw + \beta\gamma vu + \gamma^2 v^2 \\ &\quad + \gamma\delta vw + \beta\delta wu + \gamma\delta wv + \delta^2 w^2 \\ &= -\beta^2 e + \beta\gamma w - \beta\delta v - \beta\gamma w - \gamma^2 e \\ &\quad + \gamma\delta u + \beta\delta v - \gamma\delta u - \delta^2 e \\ &= -(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)e \in \mathbb{R}e \end{aligned}$$

□

Aus dem Beweis zu Teil 1. von Satz 2.2 kann man erahnen, daß es wichtig für die Konstruktion von HAMILTONschen Tripeln ist, zu einem Vektor $p \in \operatorname{Im} \mathscr{A}$ einen linear unabhängigen Vektor $q \in \operatorname{Im} \mathscr{A}$ zu finden, so daß die eine HAMILTON-Bedingung $pq + qp = 0$ erfüllt ist.

Für die Existenz eines solchen Vektors q zu jedem p zeigen wir das folgende

Lemma 2.3. Sei $\mathscr{A}$ nullteilerfrei und U ein 2-dimensionaler Untervektorraum von $\operatorname{Im} \mathscr{A}$. Dann gibt es zu jedem $p \in U$ ein $q \in U \setminus \mathbb{R}p$, so daß gilt: $pq + qp = 0$.

Beweis. Wir dürfen $p \neq 0$ annehmen, also $p^2 = \alpha e$ mit $\alpha \neq 0$ wegen Satz 1.4. Man wähle ein $x \in U$, so daß p und x linear unabhängig sind. Es gilt $px + xp = \beta e, \beta \in \mathbb{R}$ (siehe Gleichung 6). Wählt man nun $q := x + \xi p$ mit $\xi := -\frac{\beta}{2\alpha}$, so gilt:

$$\begin{aligned} pq + qp &= p(x + \xi p) + (x + \xi p)p \\ &= p(x - \frac{\beta}{2\alpha}p) + (x - \frac{\beta}{2\alpha}p)p \\ &= px + xp - 2\frac{\beta}{2\alpha}p^2 \\ &= \beta e - \frac{\beta}{\alpha}\alpha e \\ &= \beta e - \beta e \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

3 Existenz HAMILTONscher Tripel in alternativen Algebren

Hat man nun zwei rein-imaginäre linear unabhängige Vektoren, so ist es natürlich, diese wie im Korollar 1.5 zu u und v zu normieren, so daß gilt: $u, v \in \operatorname{Im} \mathscr{A}$, $u^2 = v^2 = -e$ und $uv = -vu$. Damit sind u, v und $w = uv$ Kandidaten für ein HAMILTONsches Tripel.

Allerdings ist nicht sofort klar, daß $vw = u$ gilt, da man nicht ohne weiteres in $vw = v(uv) = -v(vu)$ umklammern darf. Deshalb fordert man eine *schwache Assoziativität*:

Definition 3.1. Eine Algebra $\mathscr{A}$ heißt *alternativ*[1], wenn für alle $x, y \in \mathscr{A}$ die *schwache Assoziativität* gilt:

$$\begin{aligned} x(xy) &= x^2y \\ (xy)y &= xy^2 \end{aligned} \tag{8}$$

Damit ist jede assoziative Algebra alternativ.

Korollar 3.2. Ist eine Algebra $\mathscr{A}$ alternativ, so gilt auch

$$(xy)x = x(yx) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathscr{A} \tag{9}$$

Beweis. Man ersetze y in $(xy)y = xy^2$ durch $x + y$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (x(x+y))(x+y) &= (xx+xy)(x+y) \\ &= (xx)x + (xx)y + (xy)x + (xy)y \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} x(x+y)^2 &= x(xx+xy+yx+yy) \\ &= x(xx) + x(xy) + x(yx) + x(yy) \end{aligned}$$

Da diese beiden Gleichungen gleich sind, gilt auch $(xy)x = x(yx)$. □

Satz 3.3. (Existenzsatz für Hamiltonsche Tripel) Es sei $\mathscr{A}$ eine alternative, nullteilerfreie Algebra mit Einselement e, und sei U ein 2-dimensionaler Untervektorraum von $\operatorname{Im} \mathscr{A}$. Dann gibt es zu jedem Element $u \in U$ mit $u^2 = -e$ ein $v \in U$, so daß u, v, uv ein Hamiltonsches Tripel bilden.

Beweis. Wie in der Einleitung zu diesem Abschnitt erläutert, gibt es ein $v \in U$ mit $v^2 = -e$ und $uv = -vu$. Da $\mathscr{A}$ alternativ ist, sind für u, v und $w := uv$ die Hamilton-Bedingungen erfüllt:

$$\begin{gathered} vw = v(uv) = -v(vu) = -v^2u = u = -uv^2 = -(uv)v = -wv \\ wu = -(vu)u = -vu^2 = v = -u^2v = -u(uv) = -uw \end{gathered}$$

Bleibt noch $w^2 = -e$ zu zeigen. Es gilt:

[1] „Alternativ“ ist hier wie alternierend, wechselnd zu verstehen, da der *Assoziator* $(xy)z - x(yz)$ das Vorzeichen wechselt.

$$vw^2 = (vw)w = uw = -v$$
$$v(w^2 + e) = vw^2 + v = -v + v = 0$$

Da jedoch $\mathscr{A}$ nullteilerfrei ist, gilt $w^2 = -e$, die letzte der neun zu zeigende HAMILTON-Bedingungen. □

4 Alternative Algebren

Alternative Algebren haben, wie wir in Satz 3.3 gesehen haben, eine besondere Bedeutung. Deshalb hier zwei nützliche Aussagen über sie, die für den nächsten Paragraphen wichtig sind.

Satz 4.1. Jede alternative Algebra ist potenz-assoziativ.

Beweis. Es ist zu überprüfen, ob die Potenzregel $x^m x^n = x^{m+n}, x \in \mathscr{A}$ gilt. Wir beweisen dies durch Induktion nach n:

Für $n = 1$ ist die Sache einfach: Gilt $x^m x$, so gilt auch x^{m+1}.

Für den Induktionsschritt $n - 1 \to n$ brauchen wir die Alternativität der Algebra. Zusätzlich ist noch der Beweis der Moufang-Identität erforderlich, der hier jedoch nicht geleistet werden kann. Ein Beweis kann man unter Richard D. Schafer: *An Introduction to Nonassoziative Algebras*, Dover Publications, 1996 finden.

$$x^m x^n = x^m(xx^{n-1}) = (x^m x)x^{n-1} = x^{m+1}x^{n-1}$$

Da nach Induktionsvoraussetzung schon gezeigt ist, daß $x^{m+1}x^{n-1} = x^{m+n}$ gilt, sind wir fertig. □

Satz 4.2. Jede alternative Divisionsalgebra $\mathscr{A}$ hat ein Einselement.

Beweis. Wir wählen ein $a \in \mathscr{A}$ mit $a \neq 0$. Da $\mathscr{A}$ eine Divisionsalgebra ist, gibt es ein $e \in \mathscr{A}$ mit $ea = a$ mit $e \neq 0$ wegen $a \neq 0$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} ea &= a \\ e(ea) &= ea \\ e^2 a &= ea \qquad \text{(wegen der Alternativität)} \\ (e^2 - e)a &= 0 \\ e^2 &= e \end{aligned}$$

Wir setzen an:

$$
\begin{aligned}
e(ex - x) &= e(ex) - ex \\
&= e^2 x - ex \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Somit muß also gelten, daß $ex = x$ für alle $x \in \mathscr{A}$. Analog können wir auch für $xe = e$ vorgehen:

$$
\begin{aligned}
(xe - x)e &= (xe)e - xe \\
&= xe^2 - xe \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Somit haben wir ein Einselement gefunden. □