

Stoffrekonstruktion am Beispiel von Logarithmen

Christian Datzko
christian@datzko.ch

7. Dezember 2013

Zusammenfassung

In diesem Dokument wird eine Unterrichtssequenz zum Thema „Logarithmen“ daraufhin untersucht, inwiefern die theoretische Fülle an Stoff für die Praxis sinnvoll so reduziert werden kann, dass die für den Verständnis des Inhalts notwendigen Stoffteile angemessen repräsentiert sind, dem gültigen Lehrplan Genüge getan wird und gleichzeitig die Gesamtmenge des Stoffes klein genug für einen sinnvollen Unterricht ist. Dies wird in Form einer konkreten Unterrichtssequenz ausformuliert und nach einer exemplarischen Durchführung reflektiert.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Didaktische Analyse	3
2.1	Pool möglicher Stoffteile	3
2.2	Rekonstruktion anhand typischer Schulbücher	4
2.3	Stoffteile, die der Lehrplan vorgibt	4
2.4	Definition des Feinheitsgitters	6
3	Klassifizierung des Stoffes	6
3.1	Stoffteile, die im Kern des Inhalts sind	6
3.2	Stoffteile, die praktisch relevant sind	6
3.3	Stoffteile, die dem tieferen Verständnis und der Vernetzung dienen	6
3.4	Stoffteile, die irrelevant sind	6
4	Unterrichtsablauf	7
4.1	Planung	7
4.2	Durchführung	8
5	Reflexion	9
6	Literaturverzeichnis	9

1 Einleitung

Dieses Dokument gilt als Leistungsnachweis für Teil 2 des Moduls „Umsetzung Rahmenlehrplan“, das Teil der Weiterbildung von Gymnasiallehrpersonen, die an einer Berufsmaturitätsschule unterrichten, ist. Die Aufgabenstellung besteht darin, eine Unterrichtssequenz¹ gemäss des Konzepts „Viel Stoff – Wenig Zeit“ (Lehner, 2013) durchzuarbeiten, durchzuführen und zu reflektieren.

Die Lösung der Aufgabe bezieht sich auf den Unterricht im dritten Jahr einer Wirtschaftsmittelschule, dem letzten Schuljahr, das an der Schule durchgeführt wird, und an dessen Ende die schriftliche Prüfung für die Berufsmaturität im Fach Mathematik stattfindet. Nach einem vierten Jahr in der Praxis und bestandenen Prüfungen wird den Lernenden das Berufsmaturitätszeugnis ausgehändigt.

Zentral sind dabei die von Lehner (2013, S. 60) definierten „Siebe der Reduktion“, die dazu führen sollen, das Wesentliche für den Unterricht herauszuarbeiten, bis hin zur folgenden Aussage: „Manchmal ist es sinnvoll, scheinbar *sachlich falsch* aber *didaktisch richtig* zu erklären“ (Lehner (2013, S. 66), Hervorhebungen durch Lehner selber). Die notwendigen Vorarbeiten für den Schritt des Siebens geschehen im Kapitel 2, das „Sieben“, also das Bewerten der Stoffteile in Bezug auf ihre Relevanz, wird im Kapitel 3 vorgenommen, eine daraus folgende Planung des Unterrichts mit einem kurzen Bericht der Durchführung wird in Kapitel 4 dargestellt und zuletzt werden die daraus gewonnenen Erkenntnisse im Kapitel 5 reflektiert.

Die „Siebe der Reduktion“ dürfen nicht unreflektiert stehen gelassen werden, sondern müssen in den Zusammenhang der jüngeren didaktischen und fachdidaktischen Diskussion gestellt werden, insbesondere da die Frage nach der Bewertung eines Stoffes für die Unterrichtstauglichkeit und die Unterrichtsnotwendigkeit von Anbeginn didaktischer Entscheidungen relevant sind.

Schon in der Antike wurden die SEPTEM ARTES LIBERALES als Hervorheben relevanter Lehrinhalte ausgezeichnet worden: NULLUM SUSPICIO, NULLUM IN BONIS NUMERO QUOD AD AES EXIT schreibt Seneca (64) und fährt weiter mit CETERUM UNUM STUDIUM VERE LIBERALE EST QUOD LIBERUM FACIT, HOC EST SAPIENTIAE, SUBLIME, FORTE, MAGNANIMUM: CETERA PUSILLA ET PUERILIA SUNT. Da die Frage nach einem HOMO DIGNUS heutzutage nicht mehr genügt, um einen Inhalt hinreichend zu begründen, orientiert man sich heutzutage an der Formulierung der Kriterien für *fundamentale Ideen* von Bruner (1960), die auch im 21. Jahrhundert (z. B. in der Informatikdidaktik durch Schubert und Schwill (2004), erweitert durch Hartmann et al. (2006) oder in der Mathematikdidaktik durch Tietze et al. (2000, S. 37 ff.)) weiterhin aktuell sind.

Lehner (2013) geht jedoch über das Konzept fundamentaler Ideen hinaus, indem er eine „Reduktion in Abhängigkeit von Zielgruppe, Lernziel und Zeitbudget“ (Lehner, 2013, S. 68) fordert. Damit ist er eher auf derselben Ebene wie beispielsweise Gudjons (2003) mit seinem themenzentrierten Unterricht, was somit als Fortführung der Idee fundamentaler Ideen für die kleinere Einheit Unterrichtssequenz interpretiert werden kann. Eine solche Idee wäre eigentlich ein Kandidat für einen Merkmal guten Unterrichts, was Meyer (2004) jedoch erstaunlicherweise in seinen 10 Merkmalen guten Unterrichts interessanterweise ignoriert. Es ist also mehr als handwerkliche Anregung für die Praxis gedacht als Meyers allgemeine Überlegungen.

Die von Lehner (2013, S. 69 ff.) zu Recht vorgeschlagene Unterscheidung in ein FUNDAMENTIUM und ein ADDITUM, was er Track One/Track Two nennt, ist hingegen für den Mathematikunterricht zumindest im konkreten Fall einer Wirtschaftsmittelschule keine sinnvolle Einrichtung, da bei Mathematik als Grundlagenfach davon auszugehen ist, dass für die meisten Lernenden die In-

¹Als Unterrichtssequenz wird das Erarbeiten eines in sich abgeschlossenen Themas im Laufe von wenigen Lektionen verstanden.

teressen eher in anderen Fächern liegen (vor allem wohl in wirtschaftlichen Fächern), so dass eine grosse Mehrheit der Lernenden kein grosses Interesse in einer freiwilligen Vertiefung des Stoffes haben werden. Für die anzunehmende Minderheit, die dennoch ein Interesse an der Vertiefung hat, bieten sich auch aufgrund der anderen Rhythmisierung eher Begabtenförderprogramme oder Freifächer mit Zusatzqualifikationsmöglichkeiten an, die es zum Beispiel ermöglichen, später zusätzlich eine allgemeine Matura zu machen (sei es über das Angebot der Passarelle oder über den Quereinstieg in das reguläre Gymnasium).

Bei der Legitimierung eines Inhalts für den Unterricht wird also sowohl den theoretischen als auch den praktischen Determinanten Rechnung getragen zu sein.

2 Didaktische Analyse

Der Logarithmus ist für Lernende einer Wirtschaftsmittelschule wichtig, da er die Möglichkeit gibt, bestimmte Problemstellungen bei natürlich auftretenden Wachstumsprozessen zu lösen, zum Beispiel die Frage, wie viele Jahre ein Kapital bei einem gegebenen Zinssatz angelegt werden muss, bis sich dieses verdoppelt hat. Neben dem Potenzieren und Wurzelziehen ist es die dritte notwendige Methode zum Lösen von beliebigen Exponentialgleichungen. Gleichzeitig erlaubt der Logarithmus den Lernenden einen tieferen Einblick in das Wesen der Addition und der Multiplikation und wie diese zusammenhängen. Häufig ist es auch ein Anlass für die Lernenden, sich noch einmal eingehend mit den Potenzgesetzen zu befassen.

2.1 Pool möglicher Stoffteile

Definition (des Logarithmus): Unter der Definition des Logarithmus versteht man die Äquivalenz $b^x = a \Leftrightarrow \log_b(a) = x$.

Logarithmusfunktion: Unter der Logarithmusfunktion versteht man jegliche Form, die sich in $f(x) = a + \log_b(x - c)$ umwandeln lässt.

Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion: Analog zur Definition des Logarithmus kann man die Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion verstehen. Dies wird häufig in Ergänzung zur eher nüchternen algebraischen Motivation des Logarithmus als graphische Motivation verwendet.

Dekadischer Logarithmus: Der dekadische Logarithmus ist der Logarithmus zur Basis 10. Er wird häufig verwendet, da er im üblicherweise verwendeten Dezimalsystem von sich aus auftritt.

Natürlicher Logarithmus: Der natürliche Logarithmus ist der Logarithmus zur Basis e . Er tritt häufig aufgrund der Wichtigkeit der Eulerschen Zahl e bei der Exponentialfunktion auf.

Rechengesetze für Logarithmen: So wie die Potenzgesetze es ermöglichen Potenzen umzuwandeln, ermöglichen es die Logarithmengesetze, Logarithmen umzuwandeln. Die Logarithmengesetze weisen zudem eine gewisse Ähnlichkeit mit den Potenzgesetzen auf, was den Hintergrund von Logarithmen beleuchtet.

Basistransformation: Ebenso wie bei Potenzen kann es hilfreich sein, die Basis des Logarithmus zu wechseln. Dies geht sehr einfach, so dass Taschenrechner üblicherweise nur Logarithmen zur Basis 10 und zur Basis e anbieten. Als Basistransformation soll aber nicht nur verstanden werden, wie man einen Logarithmus zu jeder beliebigen Basis in den Taschenrechner eingibt, sondern es soll bewusst als mögliche Termumformung verstanden sein.

Logarithmisieren als Äquivalenzumformung: Zum Lösen von Exponential- und Logarithmusglei-

chungen kann es sinnvoll sein, nebst der Definition des Logarithmus noch das Logarithmieren als eigenständige Äquivalenzumformung zu verwenden. Das ist zwar nicht notwendig zum Lösen einer beliebigen Exponential- oder Logarithmusgleichung, kann jedoch gegebenenfalls viel Aufwand ersparen.

Berechnen von Logarithmen mit Hilfe von Logarithmentafeln: Vor der massenhaften Verbreitung wissenschaftlicher Taschenrechner war das Annähern von Logarithmen mit irrationalem Wert aufwendig. Hierbei halfen sogenannte Logarithmentafeln, die auf vielen Seiten konkrete Ergebnisse von Logarithmen vorberechnet hatten. Sie waren zum Beispiel vor ca. 50 Jahren üblicher Bestandteil von Unterricht an der Sekundarstufe II.

Anwendung des Logarithmus zur Vereinfachung der Multiplikation mit Hilfe des Rechenschiebers: Der Rechenschieber erlaubt aufgrund seiner logarithmischen Skala das Ersetzen einer Multiplikation durch eine Addition. Das ermöglicht ein schnelles näherungsweise Multiplizieren und Dividieren grosser Zahlen. Der Rechenschieber war zum Beispiel vor ca. 50 Jahren üblicher Bestandteil von Unterricht an der Sekundarstufe II.

Logarithmus als Isomorphismus: Dass der Logarithmus als Äquivalenzumformung verwendet werden kann, ist eigentlich eine Erkenntnis, die Voraussetzungen aus dem Grundstudium der Mathematik erfordert. Dabei wird eigentlich ein Isomorphismus von (\mathbb{R}^+, \cdot) nach $(\mathbb{R}, +)$.

2.2 Rekonstruktion anhand typischer Schulbücher

Das Buch Männel (2008) ist das eingeführte Schulbuch. Griesel und Postel (1996), Griesel et al. (2008), Baum und Schönbach (2009), Cukrowicz et al. (2008) und Lergenmüller und Schmidt (2009) sind häufig verwendete Bücher der Sekundarstufe I, in denen das Thema behandelt wird. Jankovics (2011), Rhyn (2010) und Wetzel (2012) sind häufig verwendete Bücher der Sekundarstufe II. Black et al. (2009), Neill und Quadling (2000) und Smedley und Wiseman (2004) sind häufig verwendete Bücher aus dem englischsprachigen Raum.

In Tabelle 2.2 auf der Seite 5 sind diese Schulbücher daraufhin untersucht, ob sie die in Kapitel 2.1 genannten Stoffteile enthalten oder nicht. Dabei wurde Stoffteile, die extra als Zusatzstoff bezeichnet wurden, besonders notiert. Hier ist schon erkennbar, dass die Entscheidung, welche Stoffteile als wichtiger zu klassifizieren sind, durchaus ähnlich getroffen wird, wobei im Detail Unterschiede zu finden sind. Diese sind übrigens nicht immer auf die zugrundeliegenden Lehrpläne zurückzuführen, die Bücher Griesel et al. (2008) und Cukrowicz et al. (2008) bauen beispielsweise auf demselben Lehrplan auf, gehen dennoch deutlich anders mit den Stoffteilen um. Aus diesen Gründen darf für die Klassifizierung im Kapitel 3 nicht einfach eine Kopie der Stoffteile aus dem Lehrbuch gemacht werden, sondern es muss, wie Lehner (2013) fordert, eine auf die konkrete Lerngruppe bezogene Entscheidung gemacht werden.

2.3 Stoffteile, die der Lehrplan vorgibt

Der Lehrplan Wirtschaftsmittelschule Basel setzt die kantonalen und überkantonalen Vorgaben vollständig um, es genügt also, diesen alleine zu betrachten. Der schulinterne Lehrplan ergänzt diesen Lehrplan um Hinweise zur Umsetzung.

Konkret steht dort:

13.1 Lernende kennen den Logarithmusbegriff.

13.2 Lernende können einfache Exponential- und Logarithmusfunktionen zeichnen.

	Männel (2008)	Griesel und Postel (1996)	Griesel et al. (2008)	Baum und Schönbach (2009)	Cukrowicz et al. (2008)	Lergenmüller und Schmidt (2009)	Jankovics (2011)	Rhyn (2010)	Wetzel (2012)	Black et al. (2009)	Neill und Quadling (2000)	Smedley und Wiseman (2004)
Definition	F	F	F	A	A	F	F	F	F	F	F	F
Logarithmusfunktion	F	F	F	A	–	F	F	F	F	F	F	F
Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion	F	F	F	A	–	F	F	–	F	F	F	F
Dekadischer Logarithmus	F	F	–	–	–	F	F	F	F	F	F	F
Natürlicher Logarithmus	–	–	–	–	–	–	–	F	F	–	F	F
Rechengesetze für Logarithmen	F	F	F	A	A	F	F	F	F	F	F	F
Basistransformation	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	F	F
Logarithmisieren als Äquivalenzumformung	F	–	F	–	–	–	–	F	F	F	–	–
Berechnen von Logarithmen mit Hilfe von Logarithmentafeln	–	–	–	–	–	A	A	–	–	–	–	–
Anwendung des Logarithmus zur Vereinfachung der Multiplikation mit Hilfe des Rechenschiebers	–	–	–	–	–	–	A	–	–	–	–	–
Logarithmus als Isomorphismus	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Tabelle 1: Vorkommen der Stoffteile aus dem Pool in verschiedenen Schulbüchern. F bedeutet, dass es als verpflichtender Stoff dargestellt wird, A bedeutet, dass es ein freiwilliger Zusatzstoff ist und – bedeutet, dass der Stoffteil nicht vorkommt.

13.3 Lernende können die Logarithmensätze anwenden.

13.4 Lernende können einfache Exponential- und Logarithmusgleichungen lösen und in Anwendungen umsetzen.

Im schulinternen Hinweis wird lediglich auf das Kapitel 14 im eingeführten Schulbuch Männel (2008) hingewiesen, wobei das Kapitel 14 das einzige Kapitel in dem Buch ist, was Logarithmen anspricht, so dass die entsprechende Spalte in der Tabelle 2.2 auf der Seite 5 eigentlich die Stoffteile, die im Kapitel 14 enthalten sind, darstellt.

Es muss noch erwähnt werden, dass die Logarithmensätze den Lernenden bei Prüfungen in einer Formelsammlung zur Verfügung gestellt werden. Diese enthält die Logarithmengesetze sowie die Grundform der Exponentialfunktion.

2.4 Definition des Feinheitsgitters

Für die Klassifizierung des Stoffes im Kapitel 3 ist es notwendig, die Feinheit des „Siebes“ zu definieren. Da der Stoff in drei Klassen eingeordnet werden soll, sind demnach auch drei entsprechende „Siebdichten“ zu definieren:

1. Stoffteile, die notwendig sind, um den Kern des Inhalts überhaupt zu verstehen.
2. Stoffteile, die in vielen praktischen Anwendungen relevant sind, die notwendige Voraussetzung für zukünftige Themen sind oder die in der Abschlussprüfung definitiv abgeprüft werden.
3. Stoffteile, die ein tieferes Verständnis des Inhalts fördern oder weiche Lernziele wie die Vernetzung von Inhalten fördern.

Aus Praktikabilitätsgründen sei die zeitliche Einteilung zur Klassifizierung nach [Lehner \(2013\)](#) auf 15 Minuten, 2 Lektionen und 6 Lektionen angepasst.

3 Klassifizierung des Stoffes

Die Klassifizierung des Stoffes bezieht sich, wie [Lehner \(2013\)](#) fordert, auf die konkrete Situation der beteiligten Lerngruppe (vgl. Kapitel 1).

3.1 Stoffteile, die im Kern des Inhalts sind

Die folgenden Stoffteile sind notwendig, um den Kern des Inhalts überhaupt zu verstehen, und würden in einem 15-minütigen Zeitfenster alleine erwähnt werden: Definition, Rechengesetze für Logarithmen.

3.2 Stoffteile, die praktisch relevant sind

Die folgenden Stoffteile sind in Ergänzung zu den Kerninhalten notwendig, um viele praktische Anwendungen durchführen zu können, werden für zukünftige Themen vorausgesetzt, oder werden in der Abschlussprüfung definitiv geprüft: Logarithmusfunktion, Logarithmieren als Äquivalenzumformung.

3.3 Stoffteile, die dem tieferen Verständnis und der Vernetzung dienen

Die folgenden Stoffteile fördern in Ergänzung zu den praktisch relevanten Inhalten ein tieferes Verständnis des Inhalts und die Vernetzung von Inhalten: Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, dekadischer Logarithmus.

3.4 Stoffteile, die irrelevant sind

Die folgenden Stoffteile sind für die drei oben definierten Kategorien irrelevant: Natürlicher Logarithmus, Basistransformation, Berechnen von Logarithmen mit Hilfe von Logarithmentafeln, Anwendung des Logarithmus zur Vereinfachung der Multiplikation mit Hilfe des Rechenschiebers, Logarithmus als Isomorphismus.

4 Unterrichtsablauf

4.1 Planung

Um die oben festgelegten Stoffteile sinnvoll zu unterrichten, ergeben sich die folgenden Unterrichtsstunden:

1. *Definition des Logarithmus*: Lösen der Gleichung $b^x = a$, Eingeben des Logarithmus in den Taschenrechner
 - Die Lernenden kennen die Äquivalenz $b^x = a \Leftrightarrow x = \log_b(a)$.
 - Die Lernenden können einfachste Logarithmen im Kopf berechnen.
 - Die Lernenden können beliebige Logarithmen mit Hilfe des Taschenrechners berechnen.
2. *Logarithmusfunktion*: Untersuchen der Exponential- und Logarithmusfunktion
 - Die Lernenden kennen den Verlauf der Funktion $y = \log_b(x)$ und $y = b^x$ mit verschiedenen Werten für b .
 - Die Lernenden können Funktionen vom Typ $y = \log_b(x)$ und $y = b^x$ mit verschiedenen Werten für b zeichnen.
 - Die Lernenden können die Funktion eines Summanden beim Argument x , bei der Funktion sowie einen Faktor bei der Funktion erläutern.
3. *Umkehrfunktion*: Entdecken des Prinzips der Umkehrfunktion
 - Die Lernenden können das Prinzip der Umkehrfunktion formulieren.
 - Die Lernenden können das Prinzip der Umkehrfunktion am Beispiel der Exponential- und Logarithmusfunktion erläutern.
4. *Logarithmensätze*
 - Die Lernenden kennen die Logarithmensätze.
 - Die Lernenden können die Logarithmensätze zum Vereinfachen von Termen (in beide Richtungen) anwenden.
5. *Übungen zu Logarithmensätzen, Dekadischer Logarithmus (freiwillig für die schnelleren)*
 - Die Lernenden können die Logarithmensätze in komplexen Zusammenhängen anwenden.
 - Besonders interessierte Lernende kennen den dekadischen Logarithmus und können ihn mit Hilfe des Taschenrechners direkt berechnen.
6. *Exponentialgleichungen*: Lösen auf zwei Arten.
 - Die Lernenden können Exponentialgleichungen der Form $b^x = a$ mit Hilfe der Definition und Exponentialgleichungen mit mehreren Exponenten mit Hilfe des Logarithmus als Äquivalenzumformung berechnen.
 - Die Lernenden können aufgrund der Exponentialgleichung eine Einschätzung machen, welche der beiden Lösungsmethoden erfolgsversprechender ist.

4.2 Durchführung

Die Durchführung der Planung ergab, dass die Grundentscheidungen sinnvoll waren.

Die beiden Inhalte im Kern, die Definition des Logarithmus und die Rechengesetze für Logarithmen, kamen prominent an vielen Stellen im Unterricht vor. Die schriftliche Leistungskontrolle, die der Unterrichtssequenz folgte, ergab, dass beide Inhalte von den Lernenden in zu erwartendem Umfang geleistet wurden. Die Aufgabe, $2^{x+1} = 120$ nach x aufzulösen, wurde mit 63% Lösungswahrscheinlichkeit gelöst. Die Aufgabe, den Term $\log_b(x^{-3})$ mit Hilfe der Logarithmengesetze so zu umzuwandeln, dass die Numeri der Logarithmen nur noch atomar sind, wurde mit einer Lösungswahrscheinlichkeit von 72% gelöst. Die Aufgabe, den Term $3\log_b(x) + 2\log_b(y)$ ebenso umzuwandeln, wurde mit einer Lösungswahrscheinlichkeit von 57% gelöst². Damit haben diese Aufgaben, in denen die Kernstoffteile abgefragt wurden, die höchsten Lösungswahrscheinlichkeiten.

Im Gegensatz zur ursprünglichen Planung ergab sich, dass die Logarithmensätze von den Lernenden schneller verstanden wurden als erwartet, so dass in der 5. Stunde mehr Lernende als erhofft die Möglichkeit hatten, sich mit dem dekadischen Logarithmus auseinanderzusetzen. Das werde ich jedoch nicht als Makel der Planung, da somit auch schwächere Lernende die Möglichkeit hatten, diesen Stoffteil, der ja eine Voraussetzung für das Lösen von Exponentialgleichungen ist, die wiederum Teil der Berufsmaturprüfung sind, gut zu verstehen.

Die Stoffteile mit praktischer Relevanz, die Logarithmusfunktion und das Logarithmieren als Äquivalenzumformung, sind ebenfalls zufriedenstellend bearbeitet worden. Die schriftliche Leistungskontrolle, die der Unterrichtssequenz folgte, ergab, dass hier die Lösungswahrscheinlichkeiten zwar geringer ausfielen³, jedoch noch oberhalb von der durchschnittlichen Lösungswahrscheinlichkeit lagen. Im Unterricht zeigte sich, dass die Variation der Logarithmusfunktion mit Summanden und Faktoren aufgrund geringer zeichnerischer Sorgfalt und langsamer Arbeitsweise erst durch ein Einsatz von dynamischer Geometriesoftware das dahintersteckende Prinzip entdeckt werden konnte. Hier wäre für die Zukunft ein aktiverer Einsatz solcher Medien überlegenswert, wenn auch die Kompetenzen bezüglich zeichnerischer Sorgfalt und langsamer Arbeitsweise dabei weniger gefördert würden. Hingegen war das Lösen von Exponentialgleichungen durch Logarithmieren sehr erfolgreich, da die Vorentlastung durch das intensive Beschäftigen mit den Logarithmengesetzen ihre volle Wirkung zeigen konnte.

Die Stoffteile in der dritten Gruppe, die dem tieferen Verständnis und der Vernetzung dienen, können nicht abschliessend bewertet werden. Zum einen wurden sie nicht zentral in der schriftlichen Leistungskontrolle geprüft und zum anderen sind sie aufgrund ihrer Randlage nur peripher respektive funktional eingesetzt behandelt worden. Ein gewisser Vernetzungseffekt ist während des Unterrichts beispielsweise im Vergleich zur Umkehrfunktion von linearen Funktionen und im Vergleich zu Vorkenntnissen der Geometrie aus der Volksschule („Spiegeln an der Achsendiagonalen“) eingetreten, jedoch nicht im messbaren Bereich. Ähnliches gilt für den dekadischen Logarithmus. Dennoch wurde deutlich, dass die Aufgaben, die eine solche Kompetenz voraussetzen, mit geringerer Lösungswahrscheinlichkeit gelöst wurden. So hat etwa die Aufgabe, den Term $\log_b\left(\sqrt[3]{\frac{4a^2}{5b^3}}\right)$ umzuwandeln vor allem bei den Potenzgesetzen, die gerade im vorherigen Test thematisiert waren, zu Problemen geführt, so dass die Lösungswahrscheinlichkeit nur noch bei 32% lag.

²Bei beiden letzten Aufgaben war ein Missverständnis bezüglich der Schreibweise der Basis der häufigste Fehler. Die dazugehörige Fehlvorstellung („Ein Logarithmus wird ohne Basis notiert“, korrekt wäre: „Ein Logarithmus ohne notierter Basis wird in der Regel als Logarithmus zur Basis 10 verstanden“) wurde im Unterricht möglicherweise nicht hinreichend thematisiert, sonst wären die Lösungswahrscheinlichkeiten noch höher ausgefallen.

³Sie lagen im Bereich von 57% bis 48%.

Die Entscheidungen, gewisse Stoffteile ganz aus dem zu unterrichtenden Stoff fallen zu lassen, hat sich als sinnvoll erwiesen. Bei den zur Verfügung stehenden sechs Unterrichtsstunden hätten (nicht zuletzt gemäss des In-Out-Prinzips (Lehner, 2013, S. 73-74)) zentrale Lernziele zumindest reduziert werden müssen, so dass hier ein definitiv geringerer Lerneffekt messbar gewesen wäre. Zugleich hat sich keiner dieser Stoffteile als fehlend erwiesen, insbesondere in Hinblick auf den notwendigen Kompetenzaufbau für die Abschlussprüfung.

5 Reflexion

In der Rückschau darf festgehalten werden, dass die Methode, sich bei der Stoffauswahl auf Wesentliches zu konzentrieren auch in einem Fach wie Mathematik, das für eine neue Kompetenz viele andere Kompetenzen als notwendige Voraussetzung fordert, durchaus sinnvoll umsetzbar und dem Unterricht dienlich ist. Die gemessenen Testresultate zeigen, dass dies sich auch direkt auf die Leistungen der Lernenden auswirkt: die zentralen Themen wurden deutlich besser gekannt als die Randthemen. Solange bei der Rekonstruktion die Hauptanliegen der Lernenden, nämlich hinreichend auf die nahe (Berufsmaturprüfung) und ferne (Berufsalltag) Zukunft vorbereitet zu werden, beachtet werden und „höhere Ziele“ wie Allgemeinbildung, Menschenbildung oder Ästhetik nicht aus dem Auge verloren werden, ist dies ein durchaus gangbarer, wenn auch vielleicht nicht ganz neuer Weg.

Man mag Seneca (64) also insofern ein wenig abgewandeln, dass dort stünde: QUARE *res emendas* DICTA SINT VIDES: QUIA HOMINE *docto* DIGNAE SUNT.

6 Literaturverzeichnis

- BAUM, MANFRED und SCHÖNBACH, ULRICH, Hg. (2009): *Lambacher Schweizer – Mathematik für Gymnasien – Niedersachsen*. Ernst Klett Verlag, Stuttgart.
- BLACK, KEITH, RYAN, ALISON, HAESE, MICHAEL, HAESE, ROBERT, HAESE, SANDRA und HUMPHRIES, MARK (2009): *IGCSE Cambridge International Mathematics – (0607) Extended*. Haese and Harris Publications, Adelaide Airport.
- BRUNER, JEROME SEYMOUR (1960): *The Process of Education*. Harvard University Press, Cambridge.
- CUKROWICZ, JUTTA, THEILENBERG, JOACHIM und ZIMMERMANN, BERND, Hg. (2008): *MatheNetz 9 – Ausgabe N*. Bildungshaus Schulbuchverlage Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers, Braunschweig.
- GRIESEL, HEINZ und POSTEL, HELMUT, Hg. (1996): *Elemente der Mathematik 10 – Niedersachsen*. Schroedel Verlag, Hannover.
- GRIESEL, HEINZ, POSTEL, HELMUT und SUHR, FRIEDRICH, Hg. (2008): *Elemente der Mathematik 10 – Niedersachsen*. Bildungshaus Schulbuchverlage Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers, Braunschweig.
- GUDJONS, HERBERT (2003): *Didaktik zum Anfassen – Lehrer/in-Persönlichkeit und lebendiger Unterricht*. Klinkhardt, Bad Heilbrunn.
- HARTMANN, WERNER, NÄF, MICHAEL und REICHERT, RAIMOND (2006): *Informatikunterricht planen und durchführen*. Springer, Berlin.

- JANKOVICS, PETER, Hg. (2011): *Lambacher Schweizer 9/10 – Grundlagen der Mathematik für Schweizer Maturitätsschulen*. Klett und Balmer, Zug.
- LEHNER, MARTIN (2013): *Viel Stoff – wenig Zeit – Wege aus der Vollständigkeitsfalle*. Haupt Verlag, Bern, Stuttgart, Wien.
- LERGENMÜLLER, ARNO und SCHMIDT, GÜNTER (2009): *Mathematik Neue Wege 10 – Arbeitsbuch für Gymnasien – Niedersachsen*. Bildungshaus Schulbuchverlage Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers, Braunschweig.
- MEYER, HILBERT (2004): *Was ist guter Unterricht?* Cornelsen Scriptor, Berlin.
- MÄNNEL, ROLF (2008): *Algebra für Wirtschaftsschulen*. Bildungsverlag EINS, Troisdorf.
- NEILL, HUGH und QUADLING, DOUGLAS (2000): *Pure Mathematics 1 and 2*. Cambridge University Press, Cambridge.
- RHYN, ERHARD (2010): *Aufgabensammlung Analysis*. Basel.
- SCHUBERT, SIGRID und SCHWILL, ANDREAS (2004): *Didaktik der Informatik*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin.
- SENECA (64): *Epistulae morales LXXXVIII: SENECA LVCILIO SVO SALVTEM*.
URL: <http://www.thelatinlibrary.com/sen/seneca.ep11-13.shtml>.
- SMEDLEY, ROBERT und WISEMAN, GARRY (2004): *Mathematics Standard Level for the IB Diploma*. Oxford University Press, Oxford.
- TIETZE, UWE-PETER, KLIKA, MANFRED und WOLPERS, HANS, Hg. (2000): *Mathematik in der Sekundarstufe II – Band 1: Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis*. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 2. Auflage.
- WETZEL, ADRIAN (2012): *Mathematik – einfach verständlich – Beispiele – Theorie – Aufgaben*. Basel.